

PROPOSTAS DE NOVOS ESTIMADORES TIPO JAMES-STEIN E SUAS PROPRIEDADES VIA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Cristiane Alvarenga GAJO¹
Lucas Monteiro CHAVES²
Devanil Jaques de SOUZA³

- RESUMO: O estimador de James-Stein para a média de uma normal multivariada independente com variâncias iguais, é obtido por encolhimento adaptativo do estimador média amostral. Esse estimador domina o estimador média para as dimensões maiores ou iguais a três. Neste trabalho, são apresentadas variações deste estimador para o caso normal independente com variâncias distintas e para o caso geral, em que o estimador é obtido utilizando-se a métrica de Mahalanobis. Justificativas geométricas e um estudo do comportamento desses estimadores por simulação computacional para a dimensão três são apresentadas, utilizando o erro quadrático médio como medida de qualidade.
- PALAVRAS-CHAVE: Estimador de James-Stein; normal multivariada; métrica de Mahalanobis.

1 Introdução

Stein (1956) em seu artigo “*Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution*” apresentou uma prova de que o estimador de máxima verossimilhança de uma população normal multivariada, isto é, a média amostral, é inadmissível. Esse resultado foi um choque para o mundo estatístico com consequências em várias áreas. Em James e Stein (1961), é apresentado explicitamente um estimador que domina a média amostral. Esse estimador passou a ser denominado estimador de James-Stein sendo dado por:

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano - IFGOIANO, Campus Rio Verde, CEP: 75901-970, Rio Verde, GO, Brasil. E-mail: cristiane.gajo@ifgoiano.edu.br

²Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Ciências Exatas, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: lucas@dex.ufla.br

³Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Estatística, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: devanil@des.ufla.br

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{JS}(\mathbf{X}) = \left(1 - \sigma^2 \frac{p-2}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) \mathbf{X}, \quad p \geq 3$$

em que \mathbf{X} tem distribuição normal independente multivariada de dimensão $p \geq 3$ e a variância σ^2 conhecida.

O estudo do estimador de James-Stein apresenta vários aspectos como: relações com teoria Bayesiana empírica, propriedades de funções harmônicas e uma rica abordagem geométrica. Além de sua enorme importância teórica que ajudou a se construir toda a teoria de estimadores por encolhimento o estimador de James-Stein tem sido utilizado em análise de dados reais. Como exemplo podemos citar (EFRON e MORRIS, 1975, 1977) analisando o desempenho de jogadores de baseball e mais recentemente (HAUSSER e STRIMMER, 2009) na estimação da entropia em sistemas genéticos.

Uma referência abrangendo estes vários aspectos é Gajo (2016), em que se abordam as referências básicas da teoria. O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova justificativa geométrica para o estimador de James-Stein e estudar modificações do estimador de James-Stein por simulação computacional.

2 Teoria do estimador de James-Stein

O estimador de James-Stein é um caso particular de estimador obtido por encolhimento (shrinkage). De fato, é um estimador de encolhimento adaptativo, pois o fator de encolhimento $\sigma^2 \frac{(p-2)}{\|\mathbf{X}\|^2}$ depende do valor observado \mathbf{X} . Uma das motivações de Stein, para obtenção deste estimador, é o fato que um estimador não viesado $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p)$ do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ apresenta a seguinte deficiência, nem sempre observada.

$$\begin{aligned} E \left[\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2 \right] &= E \left[\sum_{i=1}^p \hat{\theta}_i^2 \right] = \sum_{i=1}^p E \left[\hat{\theta}_i^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\text{var} \left[\hat{\theta}_i \right] + \left(E \left[\hat{\theta}_i \right] \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^p \text{var} \left[\hat{\theta}_i \right] + \sum_{i=1}^p \theta_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \text{var} \left[\hat{\theta}_i \right] + \|\boldsymbol{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, apesar de $\hat{\theta}_i$ estimar de forma não viesada θ_i , $\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2$, superestima $\|\boldsymbol{\theta}\|^2$. Surge desse fato a ideia de encolhimento. Stein utilizou argumentos geométricos para justificar a construção do seu estimador.

3 Uma justificativa geométrica para estimadores de encolhimento

Considere a “nuvem de pontos” obtida por uma amostra $\{x_1, \dots, x_n\}$ com n grande, conforme Figura 1.

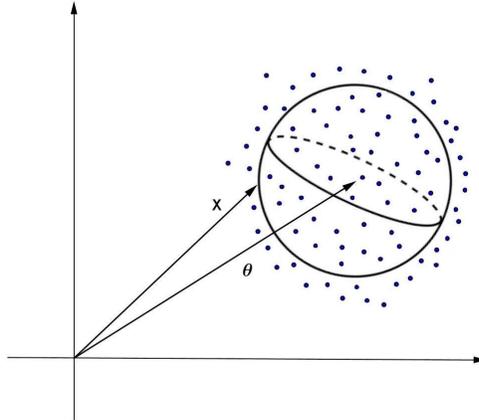


Figura 1 - Nuvem de dados ao redor do vetor de médias θ .

Como $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\theta, \sigma^2 \mathbf{I})$, esta nuvem possui, com alta probabilidade, simetria esférica com o vetor de médias θ no centro da nuvem. Considere os pontos desta nuvem que estão próximos à superfície de uma esfera centrada em θ com raio igual ao desvio padrão σ . Esses pontos são aproximadamente equiprováveis em razão da independência das componentes do vetor aleatório \mathbf{X} . Considere uma outra esfera centrada na origem e de raio $\|\theta\|$. A interseção dessas duas esferas gera na esfera centrada em $\|\theta\|$ duas calotas esféricas, conforme Figura 2. A calota definida pelos vetores x tais que $\|x\| \leq \|\theta\|$ tem evidentemente área menor que a calota definida pelos vetores x com $\|x\| \geq \|\theta\|$. Portanto, é intuitivo que ao se amostrar um vetor x sobre a esfera de centro θ , como todos os pontos sobre esta esfera são equiprováveis, a probabilidade de se observar um vetor com $\|x\| > \|\theta\|$ é proporcional a área da calota, o que significa que é mais provável se observar um vetor de comprimento maior do que $\|\theta\|$. Desta forma, temos uma justificativa heurística para o fato que $E[\|\mathbf{X}\|^2] = \|\theta\| + p\sigma^2 > \|\theta\|^2$. A ideia do encolhimento é agora justificada pois, ao se realizar o encolhimento podemos obter duas calotas esféricas $\|x\| \geq \|\theta\|$ e $\|x\| \leq \|\theta\|$ com áreas iguais.

4 Novas propostas para estimadores tipo James-Stein

Uma questão pertinente é o porquê do estimador de James-Stein não dominar a média amostral para o caso geral $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}_p(\theta, \sigma^2 \mathbf{B})$. Certamente, isto ocorre em

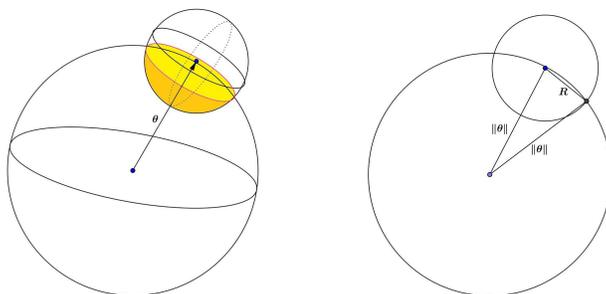


Figura 2 - Interseção entre as esferas.

razão da não simetria esférica que ocorre pela presença de covariâncias. Tem-se, então, simetria elíptica que talvez não seja muito adequada para o encolhimento na direção da origem. O encolhimento de elipsoides na direção da origem (FIGURA 3) são elipsoides, pois

$$\frac{(x_1 - a_1)^2}{c_1^2} + \dots + \frac{(x_p - a_p)^2}{c_p^2} = 1.$$

$$\frac{(\alpha x_1 - \alpha a_1)^2}{c_1^2} + \dots + \frac{(\alpha x_p - \alpha a_p)^2}{c_p^2} = \alpha^2.$$

$$\frac{(\alpha x_1 - \alpha a_1)^2}{(\alpha c_1)^2} + \dots + \frac{(\alpha x_p - \alpha a_p)^2}{(\alpha c_p)^2} = 1.$$

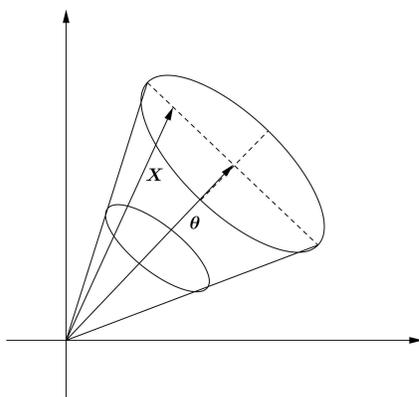


Figura 3 - Encolhimento na presença de simetria elíptica.

Outras opções de direção para o encolhimento seriam as direções dos autovetores, que respeitam a simetria elíptica. Qual dessas direções seria a mais adequada para o encolhimento, visando diminuir o erro quadrático médio? Para identificar a melhor direção, será utilizada simulação computacional. Uma possibilidade de encolhimento é a de se ter encolhimento com taxas diferentes para cada coordenada.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 X_1 \\ \vdots \\ \alpha_p X_p \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{JS} = \left(1 - \frac{p-2}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) \begin{pmatrix} \alpha_1 X_1 \\ \vdots \\ \alpha_p X_p \end{pmatrix}.$$

em que os α_i devem depender das variâncias em cada direção principal que valem $\frac{\sigma_i^2}{\lambda_i}$, com λ_i autovalor. Os vetores canônicos e_i não são direções principais a não ser que:

$$\text{cov}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_p^2 \end{pmatrix},$$

pois, nesse caso, a elipsoide possui como eixos de simetria os eixos coordenados. Estas considerações geométricas levam à definição de um estimador tipo James-Stein modificado descrito na seção 4.1.

4.1 Estimador tipo James-Stein para o caso normal independente com variâncias distintas

Considere

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix} \sim N_p \left(\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p^2 \end{pmatrix} \right).$$

O estimador James-Stein modificado para variâncias distintas, no caso $p = 3$, é:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{JS \text{ mod}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \left(1 - \sigma_1^2 \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) X_1 \\ \left(1 - \sigma_2^2 \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) X_2 \\ \left(1 - \sigma_3^2 \frac{1}{\|\mathbf{X}\|^2}\right) X_3 \end{pmatrix}.$$

Esse novo estimador proposto tem valores diferenciados para o coeficiente de encolhimento em cada coordenada. Assim, o estimador de encolhimento terá direção

diferente do vetor \mathbf{X} , isto é, a direção do encolhimento não é radial em relação à origem.

Para exemplificar, suponha o estimador em \mathbb{R}^2 , $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, considerando $\sigma_1^2 = 1$ e $\sigma_2^2 = 2$. Tem-se que:

$$\hat{\theta}_{JS \text{ mod}}(\mathbf{X}) = \left(\underbrace{\left(1 - \frac{1}{X_1^2 + X_2^2}\right)}_{\text{encolhe menos}} X_1, \underbrace{\left(1 - \frac{2}{X_1^2 + X_2^2}\right)}_{\text{encolhe mais}} X_2 \right).$$

Ocorre um encolhimento maior na coordenada de maior variabilidade, o que diminui a variabilidade do estimador nesta direção, conforme Figura 4.

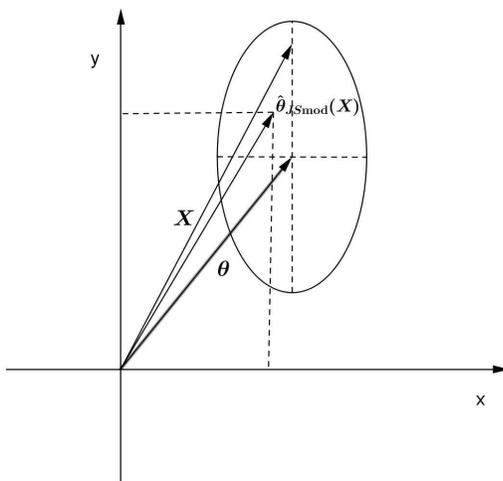


Figura 4 - $\hat{\theta}_{JS \text{ mod}}(\mathbf{X})$ com simetria elíptica no \mathbb{R}^2 .

4.2 Estimador tipo James-Stein para o caso geral

Considere a situação geral $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p) \sim N_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma})$ em que em que $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz conhecida, simétrica e positiva definida (ANDERSON, 2003). Neste caso, os eixos principais da elipse não são mais paralelos aos eixos coordenados.

A ideia é fazer uma transformação linear na variável \mathbf{X} tal que a nova variável tenha distribuição normal independente. Para isto, é necessário o processo de diagonalização da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$.

De forma geral, este processo pode ser entendido conforme se segue. A decomposição espectral da matriz $\boldsymbol{\Sigma}$ dada por $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}'$, em que \mathbf{P} é a matriz composta pelos autovetores de $\boldsymbol{\Sigma}$ em suas colunas e a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ é diagonal, formada com os autovalores λ_i de $\boldsymbol{\Sigma}$ (FERREIRA, 2011). A inversa de $\boldsymbol{\Sigma}$ é dada por

$\Sigma^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{P}'$ e esta expressão pode ser utilizada para se obter potências da matriz Σ , em particular para o expoente 1/2

$$\Sigma^{1/2} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{P}'.$$

Considere o vetor $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)$ obtido pela transformação linear de Mahalanobis (MARDIA *et al.*, 2003).

$$\mathbf{Y} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{X}.$$

Como $\text{cov}[\mathbf{X}] = \Sigma$, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{cov}[\mathbf{Y}] &= \text{cov}[\Sigma^{-1/2}\mathbf{X}] \\ &= \Sigma^{-1/2}\text{cov}[\mathbf{X}]\Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma^{-1/2}\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}\Sigma^{-1/2} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

O vetor aleatório \mathbf{Y} tem distribuição normal multivariada independente e o estimador usual de James-Stein é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{JS}(\mathbf{Y}) &= \left(1 - \frac{p-2}{\mathbf{Y}'\mathbf{Y}}\right)\mathbf{Y} \\ &= \left(1 - \frac{p-2}{(\Sigma^{-1/2}\mathbf{X})'(\Sigma^{-1/2}\mathbf{X})}\right)\Sigma^{-1/2}\mathbf{X} \\ &= \left(1 - \frac{p-2}{\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}}\right)\Sigma^{-1/2}\mathbf{X}. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{Y} = \Sigma^{1/2}\mathbf{X}$ e $E[\mathbf{Y}] = \Sigma^{-1/2}E[\mathbf{X}] = \Sigma^{-1/2}\boldsymbol{\theta}$, a ideia é aplicar a inversa dessa mesma transformação no estimador $\hat{\theta}_{JS}(\mathbf{Y})$. Obtém-se então em relação à variável \mathbf{X} um novo estimador tipo James-Stein, denominado $\hat{\theta}_{JSmah}$, que depende da métrica de Mahalanobis, dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{JSmah}(\mathbf{X}) &= \Sigma^{1/2}\hat{\theta}_{JS}(\mathbf{Y}) \\ &= \left(1 - \frac{p-2}{\mathbf{X}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}}\right)\mathbf{X}. \end{aligned}$$

A seção seguinte apresenta um estudo computacional para este estimador no caso particular em que se tem que a variável aleatória \mathbf{X} é uma normal multivariada equicorrelacionada e, portanto, a matriz Σ expressa por $\Sigma = \mathbf{V}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{\frac{1}{2}}$, e $\boldsymbol{\rho}$ é a matriz de correlação populacional dada por

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

com a matriz $\mathbf{V}^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{\sigma_i^2})$.

4.3 Estudo computacional

Por simulação Monte Carlo, são avaliados os estimadores propostos $\hat{\theta}_{JSmod}$ e $\hat{\theta}_{JSmah}$ para $p = 3$, comparando-se o desempenho dos mesmos com o estimador média amostral. A avaliação dos estimadores se deu por meio do erro quadrático médio, que será estimado por

$$EQM(\hat{\theta}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \|\hat{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}\|^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_{ji} - \theta_i)^2,$$

em que $\hat{\theta}_j$ é a estimativa de $\boldsymbol{\theta}$ obtida na j -ésima amostra e m é o número total de amostras. Para as simulações, considerou-se apenas o caso $p = 3$ e as rotinas foram desenvolvidas na linguagem R. Para o estimador de James-Stein o estudo da dimensão $p = 3$ é essencial, pois o fenômeno de diminuir o EQM em relação à média amostral não ocorre para $p = 2$. Em razão deste fato, as simulações serão realizadas apenas para $p = 3$ uma vez que explicitado o padrão de comportamento para $p = 3$ o mesmo ocorre para $p > 3$.

Para a simulação, gerou-se uma normal multivariada independente de dimensão $p = 3$, e o vetor de médias variando em um reticulado contido no cubo $(-10, 10) \times (-10, 10) \times (-10, 10)$, totalizando 9.261 pontos no reticulado. As variâncias escolhidas estão relacionadas com a dimensão do reticulado cúbico utilizado na simulação. Os estimadores são avaliados para apenas uma observação da normal multivariada tridimensional. Para o cálculo do EQM, o processo é repetido 100, 1.000 e 10.000 vezes, conforme Tabelas 1, 2 e 3. Contabilizou-se a porcentagem de vezes que a estimativa do erro quadrático médio dos estimadores de James-Stein modificado foi menor do que a estimativa do erro quadrático médio correspondente do estimador média usual, que no caso é o próprio valor observado da normal uma vez que a amostra é de tamanho unitário. As rotinas necessárias para a implementação e avaliação dos testes foram realizadas, utilizando o programa R (R CORE TEAM, 2016).

Na Tabela 1, com o objetivo de avaliar o comportamento da estimativa do erro quadrático em relação ao número de repetições, a comparação se faz entre o estimador de James-Stein usual e a média amostral. Como era de se esperar, a partir do número de repetições 1.000, praticamente em 100% dos casos o estimador de James-Stein possui estimativa de erro quadrático médio menor do que a média amostral. Portanto, a escolha dos números de repetições 100, 1.000 e 10.000 é adequada para a comparação.

Na Tabela 2 é comparado o estimador James-Stein modificado com variâncias $\sigma_1^2 = 2, \sigma_2^2 = 4$ e $\sigma_3^2 = 9$, e também com variâncias $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 2$ e $\sigma_3^2 = 4$. Constata-se, então, que de forma aparentemente independente do número de repetições e dos valores das variâncias, o estimador de James-Stein modificado domina o estimador média amostral em uma proporção superior a 70% das vezes. Uma questão interessante, a qual não foi abordada, seria detectar no reticulado

Tabela 1 - Comparação do erro quadrático médio dos estimadores James-Stein $\hat{\theta}_{JS}(\mathbf{X})$ e o estimador usual \mathbf{X} , para $p = 3$

Número de repetições	Variâncias	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_{JS}(\mathbf{X})) < E\hat{Q}M(\mathbf{X})$ (%)
100	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	76,58
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	92,60
1.000	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	97,70
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	99,74
10.000	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	100
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	99,97

cúbico, qual a região em que o comportamento do estimador modificado tem desempenho ainda melhor, e analisar se essa região está relacionada à geometria elíptica da normal.

Tabela 2 - Comparação do erro quadrático médio dos estimadores James-Stein modificado $\hat{\theta}_{JS \text{ mod}}(\mathbf{X})$ e o estimador usual \mathbf{X} , para $p = 3$

Número de repetições	Variâncias	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_{JS \text{ mod}}(\mathbf{X})) < E\hat{Q}M(\mathbf{X})$ (%)
100	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	75,58
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	70,79
1.000	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	75,20
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	71,13
10.000	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	75,42
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	71,18

Na tabela 3, os resultados obtidos para o estimador $\hat{\theta}_{JSmah}$ são apresentados para o caso em que a normal multivariada é equicorrelacionada para valores do coeficiente de correlação $\rho = 0, 0.2, 0.5$ e 0.9 . Para os números de repetições 1.000 ou 10.000, obtêm-se que o estimador $\hat{\theta}_{JSmah}$ domina o estimador média amostral em uma proporção superior à 91%.

Uma observação interessante é que o efeito da correlação sobre o desempenho dos estimadores não é muito relevante. Este fato é um tanto quanto inesperado, uma vez que, a correlação alta implica que a simetria elíptica da normal multivariada tem preponderância em um dos eixos principais.

Tabela 3 - Comparação do erro quadrático médio do estimador obtido pela transformação de Mahalanobis $\hat{\theta}_{JSmah}(\mathbf{X})$, considerando correlações entre os pares de variáveis de $\rho = 0$, $\rho = 0,2$, $\rho = 0,5$ e $\rho = 0,9$ e o estimador usual \mathbf{X} , para $p = 3$ e tamanho de amostra 1

Número de repetições	Variâncias	$E\hat{Q}M(\hat{\theta}_{JSmah}(\mathbf{X})) < E\hat{Q}M(\mathbf{X})$ (%)			
		$\rho = 0$	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,5$	$\rho = 0,9$
100	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	78,01	78,51	80,40	86,63
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	92,79	92,54	92,80	94,82
	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	90,70	91,23	92,29	93,95
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	85,70	86,36	87,81	90,69
1.000	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	97,85	97,53	96,65	98,19
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	99,75	99,83	99,28	99,51
	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	93,97	94,08	94,57	95,78
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	91,37	91,72	92,46	94,52
10.000	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 2$	99,99	99,98	99,44	99,26
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 10$	99,95	99,92	99,95	99,94
	$\sigma_1^2 = 2; \sigma_2^2 = 4; \sigma_3^2 = 9$	94,26	94,42	94,88	96,02
	$\sigma_1^2 = 1; \sigma_2^2 = 2; \sigma_3^2 = 4$	92,25	92,26	92,96	94,99

5 Conclusão

A abordagem geométrica permite uma justificação natural e intuitiva aos novos estimadores tipo James-Stein apresentados. A questão do encolhimento na direção dos eixos principais é abordada e apresenta-se promissora. O desempenho desses estimadores para os casos independentes e com variâncias distintas, bem como no caso equicorrelacionado, é superior ao desempenho do estimador média amostral para a amplitude do vetor de médias analisado e, portanto, apresenta-se como uma opção viável em possíveis aplicações. Como trabalhos futuros seria interessante a aplicação desses novos estimadores a dados reais.

Agradecimentos

Aos revisores e editores pelos comentários e sugestões.

GAJO, C. A.; CHAVES, L. M.; SOUZA, D. J. Proposals of new James-Stein type estimators and their properties via computational simulation. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.35, n.4, p.753-764, 2017.

■ **ABSTRACT:** *The James-Stein estimator for the mean of an independent multivariate normal with equal variances is obtained by adaptive shrinkage of the sample mean estimator. This estimator dominates the mean estimator for dimensions greater or equal than three. In this work, we present variations of this estimator for the independent normal case with unequal variances and for the general case where the estimator is obtained using the Mahalanobis' metric. Geometric justifications and a study of the behavior of these estimators by computational simulation for dimension three are presented using the mean square error as a measure of quality.*

■ **KEYWORDS:** *James-Stein estimator; multivariate normal; metric of Mahalanobis.*

Referências

ANDERSON, T. W. *An introduction to multivariate statistical analysis*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003. 667 p.

EFRON, B.; MORRIS, C. Data analysis using Stein's estimator and its generalizations. *Journal of the American Statistical Association*, v.70, p.311-319, 1975.

EFRON, B.; MORRIS, C. Stein's paradox in statistics. *Scientific American*, v.5, p.119-127, 1977.

FERREIRA, D. F. *Estatística multivariada*. Lavras: Editora UFLA, 2011. 676 p.

GAJO, C. A. *Propriedades e aspectos geométricos de estimadores tipo James-Stein e do estimador de Hartigan*. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) - Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG.

HAUSSER, J.; STRIMMER, J. Entropy inference and the James-Stein estimator, with application to nonlinear gene association networks. *Journal of Machine Learning Research*, v.10, p.1469-1484, 2009.

JAMES, W.; STEIN, C. *Estimation with quadratic loss*. Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., Univ. California Press, v.1, p.361-380, 1961.

MARDIA, K. V.; KENT, J. T.; BIBBY, J. M. *Multivariate analysis*. San Diego: Academic Press, 2003.

R CORE TEAM. *R: A language and environment for statistical computing*. Vienna, Austria, 2014. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>. Acesso em: 1 de agosto de 2016.

STEIN, C. *Inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution*. In Proc. Third Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab, Univ. California Press, Berkeley, p.1954-1955, 1956.

Recebido em 06.05.2016.

Aprovado após revisão em 24.11.2016.