

# NOVA GENERALIZAÇÃO PARA A CLASSE BETA- $G$ DE DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Glaucia Tadu de SOUZA<sup>1</sup>  
Wilson Rosa de OLIVEIRA JUNIOR<sup>1</sup>  
Cícero Carlos Ramos de BRITO<sup>1</sup>  
Frank GOMES-SILVA<sup>1</sup>  
Ronaldo Venâncio da SILVA<sup>2</sup>

- RESUMO: Propusemos um novo gerador de distribuições contínuas com três parâmetros adicionais chamado Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$ , que generaliza a classe Beta- $G$ . Um caso especial é apresentado. A nova função densidade pode ser expressa como uma diferença de combinações lineares de densidades exponencializadas através da mesma distribuição-base. Várias propriedades estruturais da nova classe, as quais valem para qualquer distribuição-base são derivadas, incluindo expressões explícitas para os momentos de ordem  $n$ , função geradora de momentos, função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , coeficiente geral, desvios médios, função de vida residual, função de vida residual reversa e estatísticas de ordem. Discutimos a estimação dos parâmetros do modelo através do método de máxima verossimilhança e fornecemos uma aplicação a um conjunto de dados reais.
- PALAVRAS-CHAVE: Beta- $G$ ; distribuições generalizadas; máxima verossimilhança; momentos probabilisticamente ponderados; classe exponencializada generalizada.

## 1 Introdução

Recentemente tem crescido o interesse de pesquisadores na busca de novos geradores ou classes de distribuições generalizadas. Devido as facilidades computacionais há uma maior possibilidade de se obter distribuições de

---

<sup>1</sup>Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Departamento de Estatística e Informática, CEP: 52171-900, Recife, PE, Brasil. E-mail: [glauciatadu@yahoo.com.br](mailto:glauciatadu@yahoo.com.br); [wilson.rosa@gmail.com](mailto:wilson.rosa@gmail.com); [cicerocarlosbrito@yahoo.com.br](mailto:cicerocarlosbrito@yahoo.com.br); [franksinatrags@gmail.com](mailto:franksinatrags@gmail.com)

<sup>2</sup>Colégio Militar do Recife, CEP: 52070-080, Recife, PE, Brasil. E-mail: [ronaldovenaciorvs@gmail.com](mailto:ronaldovenaciorvs@gmail.com)

probabilidade mais complexas para melhor descrever um fenômeno ou um determinado experimento. Por essa razão, generalizar distribuições surge como proposta, pois fornece maior flexibilidade entre o modelo e a massa de dados, além de possibilitar diversas formas para a taxa de falha. A ideia de generalizar surgiu quando Gompertz (1825) exponencializou a função de distribuição acumulada (fda) da exponencial a um número real positivo e diferente de zero, criando a distribuição exponencial exponencializada (EE), ou seja,

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha, \text{ para } x > 0, \lambda > 0 \text{ e } \alpha > 0.$$

As propriedades da família exponencializada têm sido estudadas por diversos autores, dentre eles destacam-se: Mudholkar, Srivastava e Freimer (1993) com a distribuição Weibull exponencializada. Gupta, Gupta e Gupta (1998) introduziram a classe geral de distribuições exponencializadas, Gupta e Kundu (1999) propuseram a distribuição exponencial generalizada, Nadarajah (2005) definiu a Pareto exponencializada, Nadarajah e Kotz (2006) propuseram a beta exponencializada e Nadarajah (2011) discutiu sobre as propriedades da distribuição exponencial exponencializada. Considere  $G(x)$  a função de distribuição acumulada (fda) da distribuição-base e  $g(x)$ , a sua função densidade de probabilidade (fdp). A distribuição exponencializada generalizada (Exp- $G$ ) é definida por

$$G_\alpha(x) = G^\alpha(x) \tag{1}$$

e

$$g_\alpha(x) = \alpha g(x) G^{\alpha-1}(x), \tag{2}$$

em que  $G(x)$  é uma distribuição-base arbitrária,  $\alpha > 0$  e  $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ .

Muitos resultados obtidos da Exp- $G$  são utilizados em diversas classes generalizadas. Isto porque as expansões da fda e fdp dessas classes são combinações em geral, da classe Exp- $G$ .

A classe de distribuições Beta- $G$  foi proposta inicialmente por Eugene, Lee e Famoye (2002) quando definiram a distribuição beta-normal inserindo a distribuição normal no limite superior da integral da distribuição clássica da beta. Com a inserção, os autores obtiveram uma distribuição mais vantajosa que a normal. Dado uma variável aleatória contínua  $X$  com fda  $G(x)$ , define-se a classe Beta- $G$  como

$$F(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x)} t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \tag{3}$$

e sua respectiva fdp como sendo

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{B(a, b)} g(x) G^{a-1}(x) [1 - G(x)]^{b-1}, \quad x > 0,$$

em que  $a > 0$  e  $b > 0$  são parâmetros de forma e  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$  é a função beta.

A Equação (3) pode ser reescrita como

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b) = \frac{B_{G(x)}(a, b)}{B(a, b)},$$

em que  $B_{G(x)}(a, b)$  é a função beta incompleta dada por

$$B_{G(x)}(a, b) = \int_0^{G(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt,$$

e  $I_{G(x)}(a, b)$  é a função beta regularizada.

A Beta- $G$  generaliza a distribuição de uma variável aleatória com fda  $G(x)$  (caso em que  $a = b = 1$ ). Os parâmetros  $a$  e  $b$  proporcionam maior flexibilidade na forma da distribuição e isto reflete positivamente na modelagem dos dados, pois estes parâmetros inserem assimetria e variam os pesos da cauda.

Em Tahir e Nadarajah (2014) é apresentada uma importante revisão dos modelos baseados na classe Beta- $G$ . Até então, a classe Beta- $G$  foi responsável pela introdução de quarenta e cinco novos modelos de distribuição de probabilidade. Alguns importantes modelos baseados na classe Beta- $G$  foram a beta Gumbel (NADARAJAH; KOTZ, 2004), beta Fréchet (NADARAJAH; GUPTA, 2004), beta Weibull (FAMOYE; LEE; OLUMOLADE, 2005), dentre outros.

Propomos uma nova classe de distribuição, a Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$ , gerada a partir do método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas apresentado em Brito (2014). A classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  é uma forte concorrente da Mc- $G$  de três parâmetros. A distribuição beta é muito utilizada pelos estatísticos por ser bastante versátil e possuir características que se aproximam da realidade dando-lhe maior aplicabilidade, por isso nossa motivação em estudá-la e contribuir com uma nova classe.

## 2 Classe Beta $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$

A classe proposta é uma aplicação do método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas apresentado por Brito (2014). Este método é um teorema proposto com sete corolários, que estende o processo de construção de distribuições de probabilidade, a fim de que as classes de distribuições sejam construídas a partir de funções monótonas univariadas pré-definidas e distribuições conhecidas.

A partir do funcional especial

$$H_{G_1, \dots, G_m}(x) = \int_{\ell_1(\cdot)(x)}^{\mu_1(\cdot)(x)} dF(t),$$

em que  $\mu_1(\cdot)(x) = (1 - \theta)G(x) + \theta$  e  $\ell_1(\cdot)(x) = \theta(1 - G(x))$ , determinamos uma classe de distribuição Beta Generalizada com três parâmetros adicionais  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $\theta \in [0, 1]$ .

Para qualquer distribuição-base  $G(x)$ , ou seja, para qualquer distribuição de variável aleatória discreta ou contínua, temos que a fda dessa classe é dada por

$$F_G(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_{(1-G(x))\theta}^{(1-\theta)G(x)+\theta} t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt, \quad (4)$$

em que  $B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$  é a função beta.

Denominaremos esta nova classe como Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G+\theta)$ . Note que, as funções  $\theta(1-G)$  e  $(1-\theta)G+\theta$ , nesta denominação, fazem alusão, respectivamente, aos limites inferior e superior vistos na Equação (4).

Diferentemente do que acontece na classe  $T-X$  (ALZAATREH; LEE; FAMOYE, 2013), utilizamos na acumulada geradora (4) limites de integração (tanto inferior, quanto superior) que constituem funções monótonas da distribuição-base  $G$ . Em um certo sentido, nossa proposta generaliza o método gerador proposto por estes autores. A acumulada da classe proposta pode ser reescrita a partir de uma extensão da função beta regularizada, conhecida como função beta regularizada generalizada apresentada por

$$F_G(x) = I_{\{(1-\theta)G(x)+\theta\}}(a, b) - I_{\{\theta(1-G(x))\}}(a, b). \quad (5)$$

Tanto a função especial em (5), quanto sua inversa podem ser calculadas, respectivamente, a partir do software MATHEMATICA (WOLFRAM, 2003) como `BetaRegularized` $[z_1, z_2, a, b] = I(z_2, a, b) - I(z_1, a, b)$  e `InverseBetaRegularized` $[z_0, s, a, b]$ , em que  $s = I(z, a, b)$ .

A fdp da nova classe proposta é definida por

$$f_G(x) = \frac{g(x)}{B(a, b)} \left\{ (1-\theta)^b [(1-\theta)G(x) + \theta]^{a-1} [1-G(x)]^{b-1} + \theta^a [1-G(x)]^{a-1} \{1 - \theta[1-G(x)]\}^{b-1} \right\}, \quad (6)$$

em que  $g(x)$  é a fdp associada a fda  $G(x)$ .

Alternativamente, podemos expressar a Equação (4) a partir de funções hipergeométricas como

$$F_G(x) = \frac{[(1-\theta)G(x) + \theta]^a}{aB(a, b)} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; (1-\theta)G(x) + \theta) - \frac{\theta^a [1-G(x)]^a}{aB(a, b)} {}_2F_1(a, 1-b; a+1; \theta(1-G(x))),$$

em que

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+j)\Gamma(\beta+j)}{\Gamma(\gamma+j)} \frac{x^j}{j!}$$

e  $\Gamma(\cdot)$  representa a função gama.

As propriedades da função hipergeométrica são bem estabelecidas na literatura e podem ser encontradas na seção 9.1 de Gradshteyn e Ryzhik (2007).

A menos que se diga o contrário, denotaremos por  $X$  uma variável aleatória com fda e fdp dadas respectivamente pelas Equações (4) e (6) e escreveremos  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)(a, b, \theta, \xi)$ , em que  $\xi$  é um vetor de parâmetros da distribuição-base.

## 2.1 Representação linear

Seja  $G(y)$  uma distribuição-base arbitrária, dizemos que  $Y \sim \text{Exp-}G(a)$ , com  $a > 0$ , se a fda e a fdp de  $Y$  são dadas respectivamente pelas Equações (1) e (2). Considere também a seguinte expressão para a beta incompleta regularizada

$$1 - I_x(a, b) = \frac{(1-x)^b}{B(a, b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \frac{(1-x)^k}{b+k}. \quad (7)$$

Adicionando e subtraindo 1 na Equação (5) e usando a expansão dada pela Equação (7) podemos escrever

$$\begin{aligned} F_G(x) &= 1 - I_{\theta[1-G(x)]}(a, b) - \{1 - I_{(1-\theta)G(x)+\theta}(a, b)\} \\ &= \frac{1}{B(a, b)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \frac{\{1 - \theta[1 - G(x)]\}^{b+k}}{b+k} \\ &\quad - \frac{1}{B(a, b)} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \frac{(1-\theta)^{b+j} [1 - G(x)]^{b+j}}{b+j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Para qualquer real  $m$  e  $-1 < x < 1$ ,

$$(1-x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} (-1)^n x^n. \quad (9)$$

Aplicando a expansão binomial da Equação (9) em (8), uma vez que  $0 \leq \theta \leq 1$ , podemos reescrever a Equação (8) como uma mistura de exponencializadas

$$F_G(x) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p G_p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h G_h(x), \quad (10)$$

em que

$$c_p = \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \binom{b+k}{l} \binom{l}{p} \frac{(-1)^{l+p} \theta^l}{(b+k) B(a, b)}$$

e

$$d_h = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \binom{b+j}{h} \frac{(-1)^h (1-\theta)^{b+j}}{(b+j) B(a,b)}.$$

A forma apresentada na Equação (10) é o principal resultado desta seção e nos revela que algumas propriedades do modelo proposto podem ser obtidas segundo as propriedades das distribuições exponencializadas.

Diferenciando a Equação (10) podemos escrever

$$f_G(x) = \sum_{p=1}^{\infty} p c_p g(x) G^{p-1}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h g(x) G^{h-1}(x).$$

Utilizando a pdf da Exp-G,  $f_G(x)$  pode ser escrita como

$$f_G(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h g_h(x), \quad (11)$$

em que

$$c_p = \sum_{k,l=0}^{\infty} \binom{1-a}{k} \binom{b+k}{l} \binom{l}{p} \frac{(-1)^{l+p} \theta^l}{(b+k) B(a,b)}$$

e

$$d_h = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-a}{j} \binom{b+j}{h} \frac{(-1)^h (1-\theta)^{b+j}}{(b+j) B(a,b)}.$$

### 3 Propriedades de caracterização da classe

As medidas estatísticas apresentam de forma resumida características da distribuição. Nesta seção serão apresentadas expansões para algumas propriedades que descrevem a classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$ .

#### 3.1 Expansão para os momentos de ordem $n$ e para a função geradora de momentos

Os momentos são importantes em qualquer análise estatística. Eles podem ser usados para estudar características da distribuição como por exemplo, tendência, dispersão, assimetria e curtose.

Se  $E(X^n)$  existe, então o momento de ordem  $n$  de uma variável aleatória  $X$  é definido por

$$\mu_n = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dF(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Utilizando a classe Exp- $G$  pode-se obter uma expansão para os momentos de ordem  $n$ . Sejam  $Y_p \sim \text{Exp-}G(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G(h)$ , a partir da Equação (11) podemos escrever

$$\mu_n = \sum_{p=0}^{\infty} c_p E(Y_p^n) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h E(Y_h^n). \quad (12)$$

A função geradora de momentos (fgm) é outra forma de caracterizar a classe. Um de seus resultados interessantes nos diz que se duas variáveis aleatórias possuem a mesma fgm, então elas seguem a mesma distribuição. A fgm de uma variável aleatória  $X$  é definida como

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x).$$

Uma expansão para  $M_X(t)$  é dada por

$$M_X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p M_{Y_p}(t) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h M_{Y_h}(t), \quad (13)$$

em que  $M_{Y_p}(t)$  e  $M_{Y_h}(t)$  são as respectivas fgms de  $Y_p \sim \text{Exp-}G$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G$ . Portanto,  $M_X(t)$  pode ser imediatamente determinada a partir de funções geradoras de momentos da classe Exp- $G$ .

Seja  $G$  a fda de uma variável aleatória  $Y$  e  $F$  a fda de uma variável aleatória  $X$  com função densidade dada pela Equação (6), os momentos da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$  podem ser obtidos a partir do  $(r; j)$ -ésimo momento probabilisticamente ponderado (MPP) de  $Y$  definido por

$$\tau_{r,j} = E[Y^r G^j(Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^r G^j(y) g(y) dy. \quad (14)$$

De fato, temos

$$E[X^r] = \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{r,h-1}. \quad (15)$$

Como  $e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^n}{n!}$ , a fgm pode ser escrita da seguinte forma

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n t^n}{n!},$$

em que  $\mu_r = E(X^r)$ , definido na Equação (15). Para a fgm da classe proposta, tem-se

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p c_p t^r}{r!} \tau_{r,p-1} - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{h d_h t^r}{r!} \tau_{r,h-1}.$$

Assim, os momentos de qualquer distribuição da classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  podem ser expressos como uma diferença de somas infinitas ponderadas de MPPs da distribuição-base. Outra forma de expressar  $\tau_{r,j}$  é baseada na função quantílica da distribuição-base denotada por  $Q_G(x) = G^{-1}(x)$ . Definindo  $g(x) = u$ , obtemos

$$\tau_{r,j} = \int_0^1 Q_G^r(u) u^j du. \quad (16)$$

A seguir, determinaremos os MPPs da classe Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  para as distribuições Fréchet (F) e exponencial (E) utilizando as Equações (14) e (16), respectivamente.

O  $(r; j)$ -ésimo MPP da distribuição Fréchet é

$$\tau_{r,j} = \lambda \sigma^\lambda \int_0^\infty x^{r-(\lambda+1)} e^{-(j+1)(\frac{\sigma}{x})^\lambda} dx,$$

em que  $\lambda > 0$  e  $\sigma > 0$ .

Utilizando  $u = (j + 1)(\sigma/x)^\lambda$ ,  $\tau_{r,j}$  é escrito de maneira reduzida como

$$\tau_{r,j} = \frac{\sigma^r}{(j + 1)^{1-r/\lambda}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-r/\lambda} du.$$

Para  $r < \lambda$ , a integral converge absolutamente. Através da Equação (15) podemos escrever o  $r$ -ésimo momento ordinário da Beta  $(\theta(1 - F), (1 - \theta)F + \theta)$  como

$$E(Y^r) = \sigma^r \Gamma\left(1 - \frac{r}{\lambda}\right) \left[ \sum_{p=1}^\infty c_p p^{r/\lambda} - \sum_{h=1}^\infty d_h h^{r/\lambda} \right].$$

A quantílica da distribuição exponencial é  $Q_G(u) = -\lambda^{-1} \log(1 - u)$ , com  $\lambda > 0$  e  $\tau_{r,j}$  é dado por

$$\tau_{r,j} = \frac{\sigma^r}{(j + 1)^{1-r/\lambda}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-r/\lambda} du = r! \lambda^r \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^{m+r} \binom{j}{m}}{(m + 1)^{r+1}}.$$

Assim, os momentos da distribuição Beta  $(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)$  são facilmente calculados pela Equação (15)

$$E(Y^r) = r! \lambda^r \left[ \sum_{p=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{p c_p (-1)^{m+r} \binom{p-1}{m}}{(m + 1)^{r+1}} - \sum_{h=1}^\infty \sum_{m=0}^\infty \frac{h d_h (-1)^{m+r} \binom{h-1}{m}}{(m + 1)^{r+1}} \right].$$



### 3.2 Expansão para a função característica

A função geradora de momentos é bastante útil, porém nem sempre existe. Por este motivo, podemos usar a função característica, que sempre existe.

Seja a função característica dada por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

Uma expansão para a função característica é imediatamente obtida a partir da representação vista na seção anterior para função geradora de momentos e utilizando a expressão de  $\varphi_X(t)$  acima.

Baseando-se na Equação (13), tem-se

$$\varphi_X(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p \varphi_{Y_p}(t) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h \varphi_{Y_h}(t),$$

em que  $\varphi_{Y_p}(t)$  e  $\varphi_{Y_h}(t)$  são as funções características de  $Y_p \sim \text{Exp-}G(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-}G(h)$ , respectivamente.

Alternativamente, a partir da expansão  $e^{itx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n x^n}{n!}$  e utilizando a Equação (14), a função característica é expressa em função dos MPPs

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n t^n}{n!} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n,h-1} \right].$$

### 3.3 Momentos centrais de ordem $n$ e coeficiente geral

Os momentos centrais de ordem  $n$  são calculados de acordo com

$$\mu'_n = E[(X - \mu)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^n dF(x).$$

Uma importante medida é a variância, que nada mais é que o momento central de ordem dois. A seguir são realizados os cálculos para os momentos centrais de  $X$ .

Tem-se pela expansão binomial que

$$(x - \mu)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \mu^r x^{n-r},$$

então  $\mu'_n$  pode ser reescrita como

$$\mu'_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \mu^r \mu_{n-r}.$$

Sabendo que  $\mu = E(X)$  e aplicando a Equação (12) na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p E(Y_p^{n-r}) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h E(Y_h^{n-r}) \right] \\ &\times \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p E(Y_p) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h E(Y_h) \right]^r, \end{aligned}$$

em que  $Y_p$  e  $Y_h$  seguem distribuições exponencializadas generalizadas com parâmetros  $p$  e  $h$ , respectivamente.

Uma forma alternativa para expressar  $\mu'_n$  é utilizando os MPPs. Portanto

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n-r,h-1} \right) \\ &\times \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right)^r. \end{aligned}$$

Uma nova generalização chamada de coeficiente geral, que estende as medidas de assimetria e curtose, é dada por

$$C_g(n) = \frac{E[(X - \mu)^n]}{\sqrt{\{E[(X - \mu)^2]\}^n}} = \frac{\mu'_n}{\sigma^n}.$$

Podemos utilizar qualquer uma das formas para  $\mu'_n$ , seja através das Exp- $G$ 's ou dos MPPs. Aqui, utilizaremos a forma expressa em (14) e a substituiremos na equação acima. Portanto,

$$C_g(n) = \frac{\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{n-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{n-r,h-1} \right) \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right)^r}{\left[ \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{2}{r} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{2-r,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{2-r,h-1} \right) \left( \sum_{p=1}^{\infty} p c_p \tau_{1,p-1} - \sum_{h=1}^{\infty} h d_h \tau_{1,h-1} \right) \right]^{n/2}}.$$

Note que, em particular, quando  $n = 3$  e  $n = 4$  em  $C_g(n)$ , obtemos expansões para as medidas de assimetria e curtose, respectivamente.

### 3.4 Desvios médios

Duas importantes estatísticas que medem a dispersão de uma variável aleatória são os desvios médios em relação à média ( $\mu$ ) e à mediana ( $M_d$ ) definidos, respectivamente por

$$d_1(X) = E(|X - \mu|) \quad \text{e} \quad d_2(X) = E(|X - M_d|).$$

Alternativamente, como definiram Cordeiro e Lemonte (2012), os desvios médios acima podem ser calculados como

$$d_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2m_1(\mu) \quad \text{e} \quad d_2(X) = \mu - 2m_1(M_d), \quad (17)$$

em que  $\mu = E(X)$  e  $m_1(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} x f(x) dx$  é o primeiro momento incompleto.

Muito utilizadas em economia, confiabilidade, demografia e medicina, as curvas de Bonferroni e Lorenz, são a principal aplicação dos momentos incompletos.

A equação geral para  $m_1(\mu)$  é definida a partir de (11) como

$$\begin{aligned} m_1(\mu) &= \int_{-\infty}^{\mu} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} x \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h g_h(x) \right] dx \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p \int_{-\infty}^{\mu} x g_p(x) dx - \sum_{h=1}^{\infty} d_h \int_{-\infty}^{\mu} x g_h(x) dx \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(\mu) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(\mu), \end{aligned}$$

em que  $J_{\alpha}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} x g_{\alpha}(x) dx$ .

A quantidade  $J_{\alpha}(\mu)$  é a base para calcular os desvios médios das distribuições Exp-G. Logo, os desvios médios em (17) dependem apenas dos desvios médios da distribuição Exp-G. Assim, as representações alternativas para  $d_1(X)$  e  $d_2(X)$  são

$$d_1(X) = 2\mu F(\mu) - 2 \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(\mu) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(\mu) \right]$$

e

$$d_2(X) = \mu - 2 \left[ \sum_{p=1}^{\infty} c_p J_p(M_d) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h J_h(M_d) \right].$$

Uma ilustração simples é realizada a seguir, com a distribuição-base sendo a exponencial (E), mostrando os cálculos para o desvio médio da variável aleatória  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - E), (1 - \theta)E + \theta)(a, b, \theta, \xi)$ . Considere a distribuição exponencial exponencializada com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\lambda > 0$ , cuja fdp é dada por

$$g_{\alpha}(x) = \alpha x e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}$$

e média  $\mu = \frac{\alpha}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} \frac{(\alpha-1-i)!}{(1+i)^2}$  (GUPTA; KUNDU, 2001). Considere a seguinte quantidade

$$J_{\alpha}(\mu) = \int_0^{\mu} \alpha x^2 e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} dx.$$

Usando a expansão binomial em (9), obtemos

$$J_{\alpha}(\mu) = \alpha \sum_{w=0}^{\infty} (-1)^w \binom{\alpha-1}{w} \int_0^{\mu} x^2 e^{-\lambda x(w+1)} dx.$$

E assim, o primeiro momento incompleto é definido como

$$m_1(\mu) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p T_{w,\alpha,\mu} - \sum_{h=1}^{\infty} d_h T_{w,\alpha,\mu},$$

em que

$$T_{w,\alpha,\mu} = \alpha \sum_{w=0}^{\infty} (-1)^w \binom{\alpha-1}{w} \frac{[-2 - \lambda\mu(w+1)(2 + \lambda\mu + w\lambda\mu)]}{\lambda^3(w+1)^3}.$$

A partir do resultado acima, pode-se calcular o desvio médio para a distribuição Beta  $(\theta(1-E), (1-\theta)E + \theta)$ .

Uma outra importante aplicação do primeiro momento incompleto está relacionada com o tempo de espera médio e a função de vida residual.

### 3.5 Função de vida residual

Muitas funções são definidas a partir da função de vida residual (fvr). A exemplo disso temos a taxa de falha, a função média de vida residual e a função de vitalidade. Estas três funções determinam unicamente  $F(X)$ , veja por exemplo, Kotz e Shanbhag (1980).

Segundo Navarro, Franco e Ruiz (1998), o  $n$ -ésimo momento da fvr de uma variável aleatória  $X$  determina unicamente a função de distribuição e é dado por

$$l_n(t) = E[(X-t)^n | X > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} (x-t)^n f(x) dx,$$

em que  $S(t)$  é função de sobrevivência,  $t > 0$  e  $n = 1, 2, \dots$ . Através do teorema binomial, a equação acima pode ser reescrita como

$$l_n(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} t_{n,r} x^r f(x) dx, \tag{18}$$

em que  $t_{n,r} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-t)^{n-r}$ .

Utilizando a forma exponencializada dada na Equação (11) e substituindo-a em (18), temos

$$l_n(t) = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,r} x^r c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} t_{n,r} x^r d_h g_h(x) \right] dx.$$

Podemos reescrever o  $n$ -ésimo momento da fvr da classe estudada em termos de exponencializadas como a seguir

$$l_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p l_{n,p}(t) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h l_{n,h}(t),$$

em que  $l_{n,p}(t)$  e  $l_{n,h}(t)$  são os  $n$ -ésimos momentos da fvr de  $Y_p \sim \text{Exp-G}(p)$  e  $Y_h \sim \text{Exp-G}(h)$ , respectivamente.

Outra função interessante é a função de vida residual média ou esperança de vida na idade  $x$  definida por  $l_1(t) = E[(X - t)|X > t]$ . Esta função corresponde a vida remanescente esperada da unidade,  $X - t$ , dado que ela sobreviveu até o tempo  $t$ .

### 3.6 Função de vida residual reversa

O  $n$ -ésimo momento da função de vida residual reversa (fvrr), determina unicamente  $F(x)$  (NAVARRO; FRANCO; RUIZ, 1998) e é definido como

$$L_n(t) = E[(t - X)^n | X \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t (t - x)^n dF(x),$$

para  $t > 0$  e  $n = 1, 2, \dots$

Pelo teorema binomial podemos escrever  $L_n(t)$  como

$$L_n(t) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t t_{n,r}^* x^r f(x) dx,$$

em que  $t_{n,r}^* = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r (t)^{n-r}$ . Então, o  $n$ -ésimo momento da fvrr de  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)(a, b, \theta, \xi)$  se torna

$$L_n(t) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t \left[ \sum_{p=1}^{\infty} t_{n,r}^* x^r c_p g_p(x) - \sum_{h=1}^{\infty} t_{n,r}^* x^r d_h g_h(x) \right] dx.$$

Alternativamente, podemos escrever a equação acima como uma diferença de combinações dos  $n$ -ésimos momentos da fvrr das exponencializadas. Portanto,

$$L_n(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p L_{n,p}(t) - \sum_{h=1}^{\infty} d_h L_{n,h}(t),$$

em que  $L_{n,p}(t)$  e  $L_{n,h}(t)$  são, respectivamente, os  $n$ -ésimos momentos da fvrr das exponencializadas  $Y_p$  e  $Y_h$ .

O tempo médio de inatividade ou tempo de espera médio, também chamado de função média de vida residual reversa, é definido por  $L_1(t) = E[(t - X)|X \leq t]$ , e representa o tempo de espera decorrido desde o fracasso de um item na condição de que essa falha tivesse ocorrido em  $(0, x)$ . Propriedades da função média residual reversa são consideradas, por exemplo, em Kayid e Ahmad (2004).

### 3.7 Estatísticas de ordem

As estatísticas de ordem têm grande importância em muitos problemas estatísticos sendo aplicada em controle de qualidade, análise de confiabilidade e testes de vida, onde alguns preditores são muitas vezes baseados nestas estatísticas. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória da distribuição Beta  $(\theta(1 - G), (1 - \theta)G + \theta)$  e  $X_{i:n}$  a  $i$ -ésima estatística de ordem. A pdf de  $X_{i:n}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  é

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n - i + 1)} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k F^{i+k-1}(x) dx, \quad (19)$$

em que  $B(\cdot, \cdot)$  é a função beta.

A partir das expressões apresentadas em (10) e (11), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} f(x)F^{j+i-1}(x) &= \left[ \sum_{p=1}^{\infty} p c_p g(x)G^{p-1}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} h c_h g(x)G^{h-1}(x) \right] \\ &\times \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^{j+i-1}. \end{aligned}$$

Utilizando a expansão binomial podemos escrever para o último fator da expressão acima, a seguinte expansão

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^{j+i-1} &= \sum_{w=0}^{j+i-1} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w \\ &\times \left[ \sum_{h=0}^{\infty} c_h G^h(x) \right]^w \\ &\times \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) \right]^{j+i-1-w}. \end{aligned} \quad (20)$$

Na seção 0.314 de Gradshteyn e Ryzhik (2007) temos a seguinte equação para a série de potência elevada a um inteiro positivo  $n$

$$\left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right]^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

em que

$$c_0 = a_0^n, \quad c_m = \frac{1}{m a_0} \sum_{k=1}^m (kn - m + k) a_k c_{m-k} \quad \text{para } m \geq 1.$$

A partir dessa informação, podemos reescrever a Equação (20) como

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} c_p G^p(x) - \sum_{h=0}^{\infty} d_h G^h(x) \right]^{j+i-1} &= \sum_{w=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} f_{j+i-w-1,p} G^p(x) \\ &\times \sum_{h=0}^{\infty} f_{w,h} G^h(x) \\ &= \sum_{w,p,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w \\ &\times f_{j+i-w-1,p} f_{w,h} G^{p+h}(x). \end{aligned}$$

em que

$$f_{j+i-w-1,0} = a_0^{j+i-w-1}, f_{j+i-w-1,p} = \frac{1}{p a_0} \sum_{m=1}^p [m(j+i-w) - p] a_m f_{j+i-w-1,p-m}$$

e  $f_{j+i-w-1,h} = \frac{1}{h a_0} \sum_{m=1}^h [m(j+i-w) - h] a_m f_{j+i-w-1,h-m}$ .

Portanto, depois de algumas manipulações algébricas, podemos expressar o seguinte produto como

$$\begin{aligned} f(x) F^{j+i-1}(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w p c_p f_{j+i-w-1,p} \\ &\times f_{w,h} g(x) G^{2p+h-1}(x) \\ &- \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{w,p=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w h c_h f_{j+i-w-1,p} \\ &\times f_{w,h} g(x) G^{2h+p-1}(x). \end{aligned}$$

Utilizando-se as Equações (1) e (2), podemos escrever

$$f(x) F^{j+i-1}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} d_{p,w,h} g(2p+h)(x) - \sum_{h=1}^{\infty} e_{p,w,h} g(2h+p)(x), \quad (21)$$

com

$$d_{p,w,h} = \frac{\sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w p c_p f_{j+i-w-1,p} f_{w,h}}{2p+h}$$

e

$$e_{p,w,h} = \frac{\sum_{w,h=0}^{\infty} \binom{j+i-1}{w} (-1)^w h c_h f_{j+i-w-1,p} f_{w,h}}{2h+p}.$$

Substituindo o resultado obtido em (21) na expressão (19) determinamos a estatística de ordem expressa como uma diferença de combinações lineares de densidades exponencializadas

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n-i}{k} \left[ \sum_{p=1}^{\infty} d_{p,w,h} g_{(2p+h)}(x) - \sum_{h=1}^{\infty} e_{p,w,h} g_{(2h+p)}(x) \right].$$

#### 4 Estimação

Várias abordagens para estimativas de parâmetros são propostas na literatura, porém o método de máxima verossimilhança é o mais utilizado. Os estimadores de máxima verossimilhança (EMVs) desfrutam de propriedades desejáveis e podem ser usados na construção de intervalos de confiança e testes estatísticos. A aproximação normal para estes estimadores em grandes amostras é facilmente manipulada, seja analítica ou numericamente. Neste trabalho, faremos uso do método de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros da classe Beta  $(\theta(1-G), (1-\theta)G + \theta)$ .

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra aleatória a partir de (6) e seja  $\Theta = (a, b, \theta, \xi)^T$  o vetor de parâmetros de dimensão  $p \times 1$ . A função de log-verossimilhança para  $\Theta$  é dada por

$$l(\Theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ (1-\theta)^b [(1-\theta)G(x_i, \xi) + \theta]^{a-1} [1 - G(x_i, \xi)]^{b-1} + \theta^a [1 - G(x_i, \xi)]^{a-1} \{1 - \theta[1 - G(x_i, \xi)]\}^{b-1} \right\} - n \log B(a, b) + \sum_{i=1}^n \log [g(x_i, \xi)],$$

em que  $g(x_i, \xi) = g(x)$  e  $G(x_i, \xi) = G(x)$ . Assumimos que as seguintes condições de regularidade para a função de log-verossimilhança são válidas: i) O suporte de  $X$  associado à distribuição não depende de parâmetros desconhecidos; ii) O espaço paramétrico de  $X$ , digamos  $\Psi$ , é aberto e  $l(\Theta)$  tem um máximo global em  $\Psi$ ; iii) Para quase todos os  $x$ , existem as derivadas de quarta ordem da log-verossimilhança com respeito aos parâmetros do modelo e são contínuas em um subconjunto aberto de  $\Psi$  que contém o parâmetro verdadeiro; iv) A matriz de informação esperada é definida positiva e finita; v) Os valores absolutos das derivadas de terceira ordem da log-verossimilhança em relação aos parâmetros são delimitados por funções finitas das esperanças de  $X$ .

Seja a função score definida como  $U(\Theta) = \frac{\partial l(\Theta)}{\partial \Theta}$ , então suas componentes  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_\theta$  e  $U_\xi$  são apresentadas a seguir como



$$\begin{aligned}
U_a &= \sum_{i=1}^n \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) \right. \\
&\times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \\
&\times \log[\theta \bar{G}(x_i, \xi)] + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \\
&\times \log[\theta \bar{G}(x_i, \xi) + G(x_i, \xi)] \left. \right\} - n[\psi(a) - \psi(a + b)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_b &= \sum_{i=1}^n \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) \right. \\
&\times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \\
&\times \log[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)] + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \\
&\times \log\{(1 - \theta)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]\} \left. \right\} - n[\psi(b) - \psi(a + b)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_\theta &= \sum_{i=1}^n \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) \right. \\
&\times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \theta^{a-1} \bar{G}^a(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \\
&\times \{ a \bar{G}^{-1}(x_i, \xi) - \theta(b - 1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{-1} \} + [(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^b \\
&\times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \{ (a - 1)[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{-1} - b \\
&\times [(1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{-1} \} \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{\xi_k} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \theta^a \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} + (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-1}(x_i, \xi) \right. \\
&\times [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-1} \}^{-1} \theta^a [1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{b-1} \bar{G}^{a-1}(x_i, \xi) \\
&\times \frac{\partial G(x_i, \xi)}{\partial \xi_k}(x_i, \xi) \{ (1 - a) \bar{G}^{-1}(x_i, \xi) + \theta(b - 1)[1 - \theta \bar{G}(x_i, \xi)]^{-1} \} \\
&+ (1 - \theta)^b \bar{G}^{b-2}(x_i, \xi) [1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)]^{a-2} \frac{\partial G(x_i, \xi)}{\partial \xi_k} \{ (a - 1) \\
&\times (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi) - (b - 1)[1 - (1 - \theta) \bar{G}(x_i, \xi)] \} \left. \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(x_i, \xi) / \partial \xi_k}{g(x_i, \xi)},
\end{aligned}$$

em que  $\bar{G}(x_i, \xi) = 1 - G(x_i, \xi)$  e  $\psi(\cdot)$  é a função digamma.

Os estimadores de máxima verossimilhança,  $\hat{\Theta} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\theta}, \hat{\xi})^\top$  de  $\Theta = (a, b, \theta, \xi)^\top$  são obtidos resolvendo simultaneamente as equações não-lineares  $U_a = 0$ ,

$U_b = 0$ ,  $U_\theta = 0$  e  $U_\xi = 0$ . Estas equações não podem ser resolvidas analiticamente e softwares podem ser usados para resolvê-las numericamente. Aqui, adotamos o software R (R Development Core Team, 2012).

Para estimação intervalar e testes de hipóteses com respeito aos parâmetros do modelo, obtemos a matriz de informação de Fisher observada  $J(\Theta)$  de dimensão  $4 \times 4$  dada por

$$J(\Theta) = - \begin{pmatrix} U_{aa} & U_{ab} & U_{a\theta} & U_{a\xi} \\ \cdot & U_{bb} & U_{b\theta} & U_{b\xi} \\ \cdot & \cdot & U_{\theta\theta} & U_{\theta\xi} \\ \cdot & \cdot & \cdot & U_{\xi\xi} \end{pmatrix}.$$

A matriz  $J(\Theta)$  é útil para obter intervalos de confiança aproximados para os parâmetros.

## 5 Aplicação

Nesta seção, demonstramos a potencialidade da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ , através de uma aplicação a um conjunto de dados reais.

### 5.1 Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$

A distribuição beta-Weibull foi proposta por Famoye, Lee e Olumolade (2005), considerando a Weibull (W) como a distribuição-base na classe Beta-G. Lee, Famoye e Olumolade (2007) obtiveram algumas propriedades da taxa de falha, entropias e uma aplicação para dados censurados. Seja  $G(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^c}$  e  $g(x) = c\lambda^c x^{c-1} e^{-(\lambda x)^c}$ , as respectivas fda e fdp da Weibull com parâmetros  $c > 0$  e  $\lambda > 0$ . Dizemos que  $X \sim \text{Beta}(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)(a, b, \theta, c, \lambda)$  se sua função de distribuição é dada por

$$F(x) = I_{\{(1-\theta)[1-e^{-(\lambda x)^c}] + \theta\}}(a, b) - I_{\{\theta[1-[1-e^{-(\lambda x)^c}]]\}}(a, b).$$

A fdp da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  é dada por

$$f(x) = \frac{c\lambda^c x^{c-1}}{B(a, b)} \left\{ e^{-b(\lambda x)^c} (1 - \theta)^b [1 - e^{-(\lambda x)^c} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} \right. \\ \left. \times [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1} \right\} \quad (22)$$

e a sua taxa de falha é dada pela expressão abaixo

$$r(x) = \frac{c\lambda^c x^{c-1} \{ e^{-b(\lambda x)^c} (1 - \theta)^b [1 - e^{-(\lambda x)^c} (1 - \theta)]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1} \}}{B(a, b) [1 - I_{\{(1-\theta)[1-e^{-(\lambda x)^c}] + \theta\}}(a, b)] + I_{\{\theta[1-(1-e^{-(\lambda x)^c})]\}}(a, b)}.$$

Algumas distribuições conhecidas são generalizadas a partir de (22). No caso  $a = b = 1$  tem-se a fdp da distribuição-base e a densidade da exponencial quando  $a = b = c = 1$ . O gráfico da Figura 1(a) ilustra a fdp para alguns valores de parâmetros. A Figura 1(b) ilustra a taxa de falha correspondente.

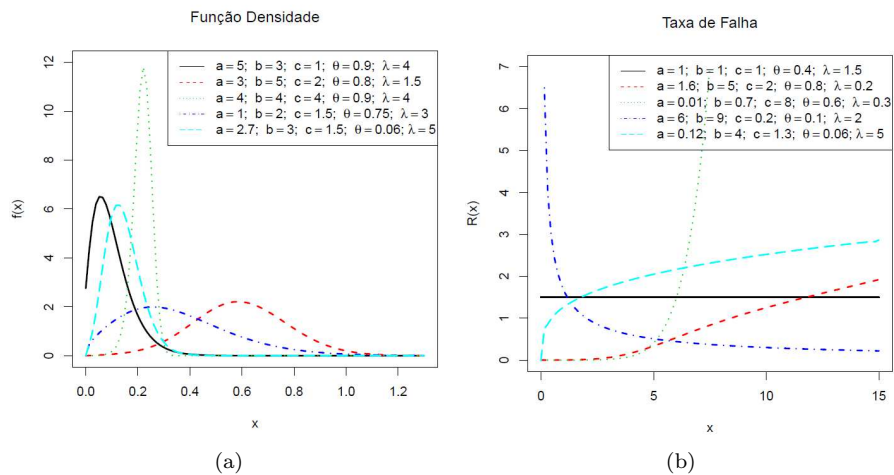


Figure 1 - Função densidade e taxa de falha da Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  para diferentes valores de  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $c$  e  $\lambda$ .

## 5.2 Distribuição Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$ aplicada a dados de pobreza

O conjunto de dados representa a taxa de pobreza obtida a partir de 533 distritos escolares com mais de 15.000 estudantes com faixa etária de 5 a 17 anos de idade no ano de 2009 (Digest of Education Statistics [http://nces.ed.gov/programs/digest/d11/tables/dt11\\_096.asp](http://nces.ed.gov/programs/digest/d11/tables/dt11_096.asp)). Os cálculos foram executados utilizando-se o pacote AdequacyModel do software R (R Development Core Team, 2012). A massa de dados é apresentada na Tabela 1.

Comparamos o ajuste da distribuição Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  aos ajustes dos modelos Beta-Dagum (BDa), Kumaraswamy Weibull exponencializada (KWE), McDonald-Dagum (McDa) e Beta exponencial exponencializada (BEE) cujas densidades são dadas como segue (para  $x > 0$ ):

- densidade da Beta  $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$  é dada por

$$\frac{c\lambda^c x^{c-1}}{B(a, b)} \{ (1-\theta)^b e^{-b(\lambda x)^c} [1 - e^{-(\lambda x)^c} + \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{a-1} + \theta^a e^{-a(\lambda x)^c} [1 - \theta e^{-(\lambda x)^c}]^{b-1} \};$$

- densidade da BDa é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} \beta \lambda \delta x^{-\delta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta(a-1)} [1 - (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta}]^{b-1};$$

Tabela 1 - Taxa de pobreza de 533 distritos escolares com mais de 15.000 estudantes com faixa etária de 5 a 17

18,0	32,0	16,4	16,5	10,2	25,0	26,6	9,7	17,5	8,3	9,2	19,8
26,7	12,6	11,6	14,2	9,7	6,4	19,4	13,8	13,2	29,6	10,3	36,5
23,1	21,2	24,7	18,8	22,7	15,1	22,6	16,2	20,9	16,5	21,5	13,6
22,3	37,0	23,6	12,1	16,6	7,1	16,8	11,6	15,3	13,2	36,0	20,8
29,5	7,8	11,9	5,3	18,2	17,1	13,8	16,5	17,2	14,0	13,1	22,3
8,0	34,6	13,3	18,7	16,6	15,0	18,6	15,8	19,8	24,2	11,8	7,0
20,4	26,1	14,7	17,8	25,4	24,6	33,7	13,8	28,3	20,2	23,1	16,4
10,8	8,7	11,2	11,9	15,7	21,3	19,0	23,4	11,6	20,2	17,6	20,2
20,8	19,3	18,0	21,7	16,5	8,8	22,3	6,1	14,1	21,1	17,0	18,2
26,0	7,0	34,7	19,6	14,5	12,9	16,7	13,8	3,9	21,0	7,9	25,8
18,9	8,0	8,7	12,2	9,7	28,4	18,7	15,4	12,0	24,1	15,9	15,4
9,3	4,7	11,6	23,4	8,0	9,5	15,3	25,9	3,3	20,9	9,0	8,9
14,1	12,2	26,7	10,3	11,0	20,1	27,9	27,8	9,7	28,1	12,8	12,3
29,0	18,0	22,0	14,7	14,9	18,4	22,9	11,2	16,9	22,3	20,5	25,7
19,2	21,0	17,5	18,0	15,8	18,4	19,9	23,4	19,9	17,0	17,1	20,3
18,6	17,3	16,7	22,7	9,1	24,2	13,9	17,6	13,3	20,7	30,2	28,4
21,6	9,3	21,8	11,7	8,3	13,2	22,1	36,9	16,0	6,3	6,9	15,3
15,2	16,8	10,8	18,5	23,5	18,4	9,3	31,6	17,2	12,4	13,1	9,5
19,7	9,3	28,6	14,1	4,0	4,1	4,5	5,6	28,4	25,4	11,4	20,3
4,7	15,5	21,5	4,9	35,4	16,5	25,1	23,9	24,5	11,8	19,5	18,4
3,2	30,2	7,3	8,2	20,7	9,0	16,9	20,0	13,2	17,1	25,0	21,2
23,0	20,5	16,0	14,9	21,9	19,9	29,6	12,6	25,9	20,5	7,8	25,5
8,5	6,2	5,1	10,6	7,1	6,0	6,6	4,6	7,1	8,8	9,8	13,2
24,5	15,2	32,3	20,4	9,9	8,1	39,7	43,4	28,9	8,5	6,3	5,8
9,1	9,2	15,3	7,8	25,7	10,0	9,9	5,4	30,7	4,7	12,4	35,0
12,9	16,1	5,4	4,6	14,4	28,5	7,0	11,3	4,8	3,8	39,2	19,8
12,6	4,6	19,1	15,6	14,7	22,6	22,6	31,0	33,7	8,4	18,9	27,9
10,3	14,2	36,1	26,6	36,4	34,6	18,7	17,9	18,1	13,0	15,7	18,1
22,5	23,3	13,8	20,3	19,3	19,2	19,3	20,2	16,3	20,8	23,8	18,8
21,4	24,0	17,4	37,8	21,0	12,2	10,2	25,3	30,0	28,7	40,4	37,8
9,6	6,8	22,5	33,2	10,6	8,2	21,8	9,3	31,2	18,8	25,6	14,8
9,3	18,3	12,7	11,2	12,1	16,5	20,8	30,4	2,7	30,5	27,6	36,5
35,4	21,3	19,4	21,3	22,5	15,1	22,5	18,1	24,3	10,4	8,0	17,9
23,2	12,4	17,6	12,1	22,1	20,7	15,8	31,3	15,3	12,3	10,0	14,0
4,6	9,3	22,9	31,0	32,2	4,9	13,2	22,5	18,9	23,8	26,0	15,3
46,3	26,4	14,7	9,1	10,4	12,1	27,3	14,3	13,5	31,4	10,8	10,4
21,6	42,6	32,6	9,1	28,6	4,6	24,3	20,3	19,8	23,0	32,9	28,3
10,1	15,5	25,1	18,5	11,5	6,5	20,1	13,4	53,6	13,6	48,7	5,8
6,8	23,6	11,4	33,8	9,2	21,0	16,5	45,7	15,3	15,5	24,4	6,3
15,0	42,7	6,9	19,2	6,7	34,3	24,7	20,2	22,3	25,8	32,0	33,4
47,3	29,8	9,1	9,4	9,0	7,5	13,3	7,8	9,0	20,7	17,7	8,5
9,6	9,3	7,6	6,1	19,4	5,0	10,7	3,2	18,5	26,1	22,8	7,4
35,4	8,7	5,3	9,1	7,5	11,5	9,7	13,6	15,1	12,6	15,4	4,1
17,4	11,0	5,0	5,0	9,1	13,2	20,3	20,0	20,4	13,5	20,2	10,3
15,6	15,9	14,3	36,4	20,2							

- densidade da KWE é dada por

$$a b c \alpha \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} [1 - e^{-(\beta x)^\alpha}]^{a-1} [1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha]^{b-1} \{1 - [1 - (1 - e^{-(\beta x)^\alpha})^\alpha]^b\}^{(c-1)};$$

- densidade da McDa é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} c \beta \lambda \delta x^{-\delta-1} (1 + \lambda x^{-\delta})^{-\beta a c - 1} [1 - (1 + \lambda x^{-\delta})^{-c \beta}]^{b-1};$$

- A densidade da BEE é dada por

$$\frac{1}{B(a, b)} \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1} [1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha]^{b-1}.$$

Os parâmetros das densidades acima são todos números reais positivos.

Calculamos as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros dos modelos ajustados, bem como os erros-padrão (entre parênteses) listados na Tabela 2.

Tabela 2 - EMVs (erros-padrão entre parênteses)

Distribuição	Estimativas					
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	$\hat{a}$ 0,0145 (0,0052)	$\hat{b}$ 8,8566 (13,0181)	$\hat{c}$ 1,9667 (0,0798)	$\hat{\theta}$ 0,7705 (1,0538)	$\hat{\lambda}$ 0,4441 (0,0763)	
BDa	$\hat{a}$ 0,2551 (0,1410)	$\hat{b}$ 11,1117 (9,7964)	$\hat{\beta}$ 8,8839 (5,3082)	$\hat{\lambda}$ 57,6598 (118,1263)	$\hat{\delta}$ 1,5071 (0,5727)	
KWE	$\hat{a}$ 0,0146 (0,0143)	$\hat{b}$ 0,2584 (0,0284)	$\hat{c}$ 17,4024 (6,7843)	$\hat{\alpha}$ 1,0301 (0,0162)	$\hat{\beta}$ 0,4829 (0,0345)	
McDa	$\hat{\lambda}$ 6,5087 (11,0319)	$\hat{\delta}$ 1,0534 (0,3440)	$\hat{\beta}$ 4,2763 (6,0102)	$\hat{a}$ 0,2572 (0,1084)	$\hat{b}$ 31,3347 (28,2547)	$\hat{c}$ 5,1477 (7,2353)
BEE		$\hat{a}$ 0,1680 (0,1258)	$\hat{b}$ 2,0406 (0,5208)	$\hat{\lambda}$ 0,0958 (0,0155)	$\hat{\alpha}$ 21,8988 (18,2772)	

Consideramos as estatísticas AIC, BIC, AICc e HQIC para a seleção do modelo mais adequado ao conjunto de dados citado anteriormente. Na Tabela 4 são apresentados os testes de Kolmogorov-Smirnov (K-S), Crámer-von Mises ( $W^*$ ) e Anderson-Darling ( $A^*$ ).

De acordo com as informações da Tabela 4 podemos verificar que os valores fornecidos para as estatísticas AIC e AICc são muito próximos. Isto é explicado pelo fato do AICc convergir para o AIC em amostras de tamanho grande.

Tabela 3 - Estatísticas AIC, AICc, BIC e HQIC

Distributions	AIC	BIC	AICc	HQIC
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	3757,850	3779,242	3757,964	3766,221
BDa	3760,962	3778,000	3760,962	3767,583
KWE	3772,120	3793,518	3772,239	3780,497
McDa	3762,850	3788,527	3763,016	3772,902
BEE	3760,908	3778,022	3760,984	3767,605

Tabela 4 - Estatísticas K-S,  $W^*$  e  $A^*$

Distribuições	K-S	$W^*$	$A^*$
Beta $(\theta(1 - W), (1 - \theta)W + \theta)$	<b>0,0269</b>	<b>0,0835</b>	<b>0,4747</b>
BDa	0,0295	0,0855	0,5000
KWE	0,0429	0,1973	1,0966
McDa	0,0299	0,0956	0,5250
BEE	0,0291	0,0857	0,5005

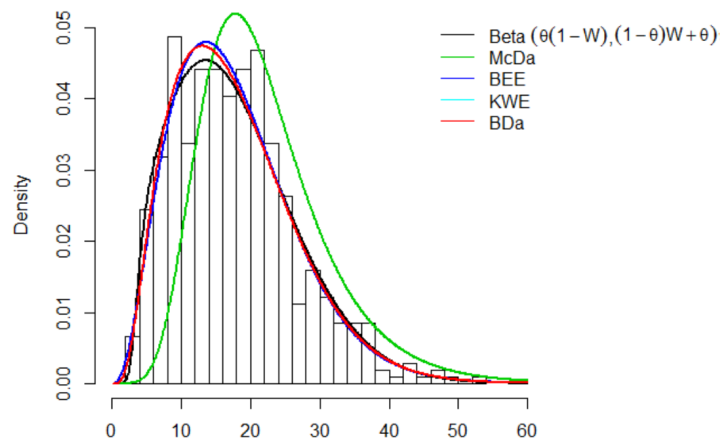


Figure 2 - Ajuste das densidades para o histograma dos dados atuais.

Mais informações sobre os ajustes das respectivas densidades são obtidos através de uma comparação visual no histograma apresentado na Figura 2.

De acordo com os valores das estatísticas AIC, BIC, AICc, HQIC, K-S,  $W^*$  e  $A^*$  apresentados nas Tabelas 3 e 4, e sabendo que, quanto menor forem os valores destas estatísticas, melhor será o ajuste, é evidente que o modelo

Beta( $\theta(1 - W)$ ,  $(1 - \theta)W + \theta$ ), fornece o melhor ajuste aos dados dentre os modelos comparados e portanto, deverá ser o modelo indicado para escolha.

## Conclusões

Em muitas áreas aplicadas existe a necessidade de se obter formas mais abrangentes das distribuições já conhecidas. De modo geral, as novas distribuições são mais flexíveis para modelar dados reais que apresentam um elevado grau de assimetria e curtose. Este trabalho propôs uma nova classe de distribuição generalizada com três parâmetros adicionais ( $a$ ,  $b$  e  $\theta$ ), a Beta ( $\theta(1 - G)$ ,  $(1 - \theta)G + \theta$ ), gerada pelo método gerador apresentado por Brito (2014). Várias propriedades estruturais da nova classe, que servem para qualquer modelo da distribuição-base, são derivadas, incluindo expressões explícitas para momentos de ordem  $n$ , função de geradora de momentos, função característica, momentos centrais de ordem  $n$ , coeficiente geral, desvios médios, função de vida residual, função de vida residual reversa e estatísticas de ordem. Uma das classes mais conhecidas na literatura de novas distribuições de probabilidade, a Beta- $G$  surge como caso especial da classe Beta ( $\theta(1 - G)$ ,  $(1 - \theta)G + \theta$ ) quando fazemos  $\theta = 0$ . Através das estatísticas AIC, BIC, AICc, HQIC e testes de aderência tais como K-S,  $W^*$  e  $A^*$  concluímos que a distribuição Beta ( $\theta(1 - W)$ ,  $(1 - \theta)W + \theta$ ) (subcaso da classe proposta) é bastante competitiva, na modelagem a dados reais, quando comparada com outras distribuições bem estabelecidas na literatura. Esperamos que a nova classe e seus modelos derivados possam atrair aplicações em várias áreas do conhecimento.

SOUZA, G. T.; OLIVEIRA JUNIOR, W. R.; BRITO, C. C. R.; GOMES-SILVA, F.; SILVA, R. V. A new generalization for the Beta- $G$  probability distribution class. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.35, n.4, p.785-809, 2017.

- **ABSTRACT:** *We propose a new generator of continuous distributions with three extra parameters called the Beta ( $\theta(1 - G)$ ,  $(1 - \theta)G + \theta$ ), which generalizes the Beta- $G$  class. A special case is presented. The new density function can be expressed as a difference of linear combinations of exponentiated densities based on the same baseline distribution. Various structural properties of the new class, which hold for any baseline model, are derived including explicit expressions for the moments of order  $n$ , the moment generating function, the characteristic function, central moments of order  $n$ , the general coefficient, the mean deviations, residual life function, reverse residual life function and order statistics. We discuss estimation of the model parameters by maximum likelihood and provide an application to a real data set.*
  
- **KEYWORDS:** *Beta- $G$ ; generalized distributions; maximum likelihood; probability weighted moments; exponentiated generalized class.*

## Referências

- ALZAATREH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, Springer, v. 71, p. 63–79, 2013.
- BRITO, C. C. R. *Método gerador de distribuições e classes de distribuições probabilísticas*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Biometria e Estatística Aplicada, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, Recife, Agosto 2014.
- CORDEIRO, G. M.; LEMONTE, A. J. The Mcdonald inverted beta distribution. *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, p. 1174–1197, 2012.
- EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-normal distribution and its applications. *Communication in Statistics - Theory and Methods*, v. 31, p. 497–512, 2002.
- FAMOYE, F.; LEE, C.; OLUMOLADE, O. The beta-Weibull distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, v. 4, p. 121–136, 2005.
- GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series B: Biological Sciences*, v. 115, p. 513–585, 1825.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. seventh edition. San Diego: Academic Press, 2007.
- GUPTA, R. C.; GUPTA, P. L.; GUPTA, R. D. Modeling failure time data by Lehmann alternatives. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, New York, v. 27, p. 887–904, 1998.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. *Australian e New Zealand Journal of Statistics*, Oxford, v. 41, n. 2, p. 173–188, 1999.
- GUPTA, R. D.; KUNDU, D. Exponentiated exponential family: an alternative to gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal*, v. 43, p. 117–130, 2001.
- KAYID, M.; AHMAD, I. On the mean inactivity time ordering with reliability applications. *Probability in the Engineering and Informational Science*, v. 18, p. 395–409, 2004.
- KOTZ, S.; SHANBHAG, D. N. Some new approaches to probability distributions. *Advances in Applied Probability*, v. 12, p. 903–921, 1980.
- LEE, C.; FAMOYE, F.; OLUMOLADE, O. Beta-Weibull distribution: Some properties and applications to censored data. *Journal Of Modern Applied Statistical Methods*, v. 6, p. 173–186, 2007.



- MUDHOLKAR, G.; SRIVASTAVA, D.; FREIMER, M. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 42, p. 229–302, 1993.
- NADARAJAH, S. Exponentiated Pareto distributions. *Statistics*, London, v. 39, p. 255–260, 2005.
- NADARAJAH, S. The exponentiated exponential distribution: a survey. *AStA Advances in Statistical Analysis*, New York, v. 95, p. 219–251, 2011.
- NADARAJAH, S.; GUPTA, A. K. The beta Fréchet distribution. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, v. 14, p. 15–24, 2004.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, B. S. The beta exponential distribution. *Reliability Engineering System Safety*, v. 91, p. 689–697, 2006.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. *Mathematical Problems in Engineering*, Amsterdam, v. 4, p. 323–332, 2004.
- NAVARRO, J.; FRANCO, M.; RUIZ, J. M. Characterization through moments of the residual life and conditional spacing. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A*, v. 60, p. 36–48, 1998.
- TAHIR, M. H.; NADARAJAH, S. Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established G families. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 87, n. 2, p. 539–568, 2014.
- WOLFRAM, S. *The Mathematica Book*. 5th. ed. Cambridge University Press: London, 2003.

Recebido em 04.07.2016.

Aprovado após revisão em 07.11.2016.