

## PROPOSTA DE UM TESTE DE NORMALIDADE MULTIVARIADA EXATO BASEADO EM UMA TRANSFORMAÇÃO $t$ DE STUDENT

Janaína Marques e MELO<sup>1</sup>  
Daniel Furtado FERREIRA<sup>1</sup>

- RESUMO: A distribuição normal é uma das mais importantes distribuições contínuas da Estatística. Além dessa distribuição descrever uma série de fenômenos, ela é de grande uso na estatística inferencial. Vale ressaltar que o teste de normalidade influencia diretamente na qualidade e confiabilidade das pesquisas científicas, uma vez que a distribuição normal faz parte da suposição de diversos procedimentos estatísticos e a não verificação dessa pressuposição pode conduzir a resultados e conclusões incorretas. Na distribuição normal multivariada, isso não é diferente. Uma maneira simples, porém subjetiva, de se verificar a normalidade de uma distribuição tanto univariada quanto multivariada é por meio de gráficos, como o gráfico quantil-quantil ( $Q-Q$  plot). Além disso, os  $Q-Q$  plots são ferramentas viáveis para a visualização de valores discrepantes. Uma desvantagem do  $Q-Q$  plot clássico é que os quantis observados não são independentes sendo apenas identicamente distribuídos, tornando-se independentes apenas assintoticamente. Isso compromete o  $Q-Q$  plot ou qualquer teste que tenha o mesmo princípio básico. O objetivo do presente trabalho é propor um teste exato baseado na distribuição  $t$  de Student, validar o seu desempenho por simulação Monte Carlo e desenvolver um  $Q-Q$  plot para fornecer provas suplementares para detectar uma possível normalidade multivariada na análise de dados em  $p$  dimensões. Este  $Q-Q$  plot provém de uma caracterização da distribuição normal multivariada feita por Yang *et al.* (1996) baseada em uma das propriedades da distribuição esférica (FANG *et al.*, 1990). Foi utilizado o programa R versão 3.1.0 de programação livre, e fonte aberta, para auxiliar na construção desse gráfico, bem como nas simulações de validação do teste. O desempenho, validado por simulação Monte Carlo, mostrou que o teste proposto teve sucesso no controle das taxas de erro tipo  $I$ , sendo um teste exato, porém foi pouco poderoso.
- PALAVRAS-CHAVE: Teste de normalidade multivariada; gráfico quantil-quantil; distribuição  $t$  de Student.

---

<sup>1</sup>Universidade Federal de Lavras - UFLA, Departamento de Estatística, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil. E-mail: [janaína\\_gauss@yahoo.com.br](mailto:janaína_gauss@yahoo.com.br); [danielff@des.ufla.br](mailto:danielff@des.ufla.br)

## 1 Introdução

A distribuição Normal é uma das mais importantes distribuições contínuas da Estatística, conhecida também como distribuição de Gauss ou Gaussiana. Por descrever o comportamento de diversos fenômenos aleatórios, de forma exata ou aproximada, possui grande uso na estatística inferencial.

Vale ressaltar que a suposição de normalidade univariada ou multivariada é exigida em muitos modelos estatísticos e métodos de análise de dados. Por exemplo, em regressão linear testa-se a normalidade dos resíduos, caso essa premissa seja inválida, os resultados da regressão (intervalos de confiança, etc.) ficam comprometidos. Destaca-se, então, a importância do teste de normalidade, que influencia diretamente na qualidade e confiabilidade das pesquisas científicas, uma vez que a não verificação dessa suposição pode conduzir a resultados e conclusões equivocadas.

Uma forma de verificar a normalidade dos dados é por meio de análise gráfica, como histogramas e o gráfico de quantil-quantil (também conhecido na literatura por *Q-Q plot*), embora esse procedimento contemple certa subjetividade na avaliação do mesmo. Além disso, essas análises gráficas, por serem subjetivas, não são suficientes para se fazer inferência sobre a normalidade, sendo necessária a utilização de testes estatísticos. No caso multivariado, principalmente, isso é mais evidente, tendo em vista a complexa relação existente entre as variáveis envolvidas. Apesar disso, o gráfico de quantil-quantil é uma ferramenta bastante útil para a visualização de valores discrepantes da amostra. Nesses gráficos e no caso univariado são *plotados* os percentis amostrais *versus* os percentis esperados pelo ajuste de uma distribuição normal. Se os pontos estiverem localizados próximos a uma reta de mínimos quadrados a suposição de normalidade deve ser aceita. No caso multivariado, as observações são transformadas em distâncias de Mahalanobis para o vetor de médias amostral e os quantis amostrais e esperados dessas distâncias são *plotados* para a obtenção do gráfico de quantil-quantil.

No caso univariado, os testes mais encontrados na literatura são: aderência qui-quadrado, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors e Shapiro-Wilk. No caso multivariado, em geral, os testes existentes são extensões daqueles propostos para o caso univariado (CIRILLO e FERREIRA, 2003).

Uma desvantagem do gráfico de quantil-quantil multivariado é que os quantis observados não são independentes, sendo apenas identicamente distribuídos, tornando-se independentes apenas assintoticamente. Isso compromete o desempenho do procedimento do gráfico quantil-quantil, bem como de qualquer teste que utilize os quantis amostrais observados.

Como já foi afirmado anteriormente, vários testes existentes de normalidade multivariada fazem uso da transformação em distâncias de cada vetor aleatório observado na amostra, por sua vez, gera uma amostra de distâncias dependentes. Esse trabalho visa trocar essa transformação gerando dados independentes. Essa transformação é centrada na caracterização da distribuição normal multivariada feito por Yang *et al.* (1996) baseada em uma das propriedades da distribuição

esférica (FANG *et al.*, 1990).

O presente trabalho tem como principal objetivo propor um novo teste exato de normalidade multivariada, tendo como objetivos específicos: validar o desempenho do mesmo por simulação Monte Carlo e desenvolver um gráfico de quantil-quantil (*Q-Q plot*), utilizando o programa *R* (R Core Team, 2013) como ferramenta.

## 2 Métodos

### 2.1 Proposta do teste de Normalidade Multivariada

O novo teste proposto é baseado na transformação de Liang *et al.* (2004) para a distribuição *t* de *Student*.

Para o novo teste proposto, que será chamado de teste de normalidade multivariada *t* (TMNt), as hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Os dados amostrais seguem uma dist. normal multivariada } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \\ H_1 : \text{Os dados amostrais não seguem uma dist. normal multivariada } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \end{cases}$$

em que:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\},$$

com média  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^p$  e covariância  $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  positiva definida.

Para determinar a estatística do teste, foi considerada uma amostra *p*-variada  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_j, \dots, \mathbf{X}_n$  de uma distribuição qualquer com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}$  com dimensão  $(p \times 1)$  e matriz de covariâncias  $\Sigma$  positiva definida de dimensão  $(p \times p)$ . Sob a hipótese de normalidade multivariada de  $\mathbf{X}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , foi realizada a seguinte transformação:

$$\mathbf{U}_i = \frac{\mathbf{X}_1 + \dots + \mathbf{X}_i - i \mathbf{X}_{i+1}}{\sqrt{i(i+1)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Posteriormente, foram computados

$$\mathbf{S}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_k = \mathbf{S}_k^{-1/2} \mathbf{U}_k, \quad \text{com} \quad k = p+1, \dots, n-1.$$

Finalmente, obteve-se

$$\begin{aligned} \bar{Y}_k &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_{ki}, & S_k^2 &= \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (Y_{ki} - \bar{Y}_k)^2 \quad \text{e} \\ T_k &= \frac{\bar{Y}_k \sqrt{p}}{S_k}, \end{aligned} \tag{1}$$

para  $k = p + 1, p + 2, \dots, n - 1$ . As variáveis aleatórias  $T_k$  são  $\overset{iid}{\sim} t_\nu$ , sendo  $\nu = p - 1$  graus de liberdade e  $k = p + 1, \dots, n - 1$  (LIANG *et al.*, 2004).

A estatística do teste proposto de normalidade foi a de Kolmogorov-Smirnov, dada por:

$$D^+ = \max[F_{T_k}(t_k) - F_T(t)], \quad (2)$$

em que  $T_k$  é uma variável aleatória obtida em (1),  $T$  é uma variável aleatória da distribuição  $t$  de *Student* com  $\nu = p - 1$  graus de liberdade,  $F_{T_k}(t_k)$  e  $F_T(t)$  são as funções de distribuição empírica amostral e  $t$  de *Student*. Respectivamente, o valor- $p$ , sob  $H_0$ , é obtido conforme descrito em Marsaglia, Tsang, e Wang (2003). A não rejeição da hipótese de que  $T_k \sim t_{p-1}$  equivale a não rejeição da hipótese de que  $\mathbf{X}_j \sim N_p(\mu, \Sigma)$ .

Para a construção do  $t$ -plot foi plotado os pontos  $(tq_j, t_{(j)})$ , em que  $t_{(j)}$  é a estatística de ordem dos  $T_k$ s, dada por:

$$t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(n-p-1)}$$

e  $tq_j$  é igual a inversa da função de distribuição  $t_\nu$  de *Student* com  $\nu = p - 1$  aplicada em um ponto, dada por:

$$tq_j = F^{-1} \left( \frac{2j - 1}{2(n - p - 1)}; p - 1 \right),$$

para  $j = 1, 2, \dots, n - p - 1$ .

## 2.2 Validação do desempenho do teste

Foi usada simulação Monte Carlo em dois cenários para avaliar o desempenho do TNMt, mensurando-se as taxas de erro tipo I e o poder do teste.

Inicialmente, foram simuladas amostras normais  $p$ -variadas considerando diferentes números de variáveis  $p$  e tamanhos amostrais  $n$ . Para cada configuração foram gerados  $N = 2000$  amostras. A proporção de rejeições nas  $N$  simulações de cada configuração correspondeu à taxa de erro tipo I, e os níveis de significância nominais foram fixados em  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$ .

Posteriormente, foram simuladas amostras de outras distribuições  $p$  variadas não-normais: a distribuição  $t$ -*Student* multivariada com  $\nu = 1$  e  $\nu = 30$ , a distribuição log-normal multivariada, a distribuição normal contaminada multivariada e a distribuição uniforme multivariada. As mesma configurações de  $p$  e  $n$  anteriores foram utilizadas. A proporção de rejeições em cada configuração foi computada em  $N = 2000$  simulações Monte Carlo e correspondeu à estimativa empírica do poder do teste.

Para fins de comparação, foram usados os resultados de Biase (2011), que aplicou o teste de Shapiro-Wilk de normalidade multivariada (TSWNM) de Royston (1983), o teste Monte Carlo de normalidade multivariada baseado em

distâncias (TMCNMD) e o teste de normalidade multivariada baseado em *bootstrap* paramétrico (TNMBP) propostos pela autora.

Foram considerados os valores na combinações de  $n$  e  $p$  para a dimensão da matriz de dados  $\mathbf{X}_{n \times p}$ , de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 - Os testes de normalidade multivariados usados nas comparações, com os tamanhos amostrais  $n$  e número de variáveis  $p$  usados nas construções das matrizes de dados  $\mathbf{X}_{n \times p}$ , considerando os teste usados no trabalho

Testes de normalidade multivariada	$n$	$p$
TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt	10	2,4,6 e 8
TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt	20	2,5,10 e 18
TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt	50	2,10,25 e 48
TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt	100	2,10,50 e 98
TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt	200	2,10,50 e 100
TMCNMD, TNMBP e TNMt	10000	5

O teste estatístico é considerado exato, quando o nível de significância real (estimado por simulação) for igual ao nível de significância nominal (fixado previamente pelo pesquisador), conservador, quando o nível de significância real for inferior ao nível de significância nominal, ou liberal, quando o nível de significância real for superior ao nível de significância nominal. Os procedimentos para essa classificação são os mesmos adotados por Bastos (2013).

### 3 Resultados e discussões

Nessa seção, os resultados das simulações são apresentados em duas etapas: uma referente ao erro tipo I e outra ao poder do teste. Além disso, foi realizada uma aplicação com o propósito de ilustrar alguns testes existentes de normalidade multivariada e o teste proposto.

A taxa de erro tipo I e o poder do teste proposto (TNMt) foram computados e comparados com três testes de normalidade multivariada: o teste de Shapiro-Wilk (TSWNM), proposto por Royston (1983); o teste Monte Carlo baseado em distâncias (TMCNMD), proposto por Biase (2011); o teste baseado em *bootstrap* paramétrico (TNMBP), também proposto por Biase (2011). Os níveis de significância nominais considerados para o erro tipo I e o poder do teste foram  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$ .

Vale ressaltar que para o poder dos testes foram consideradas cinco distribuições não-normais multivariadas: *t-Student* (com diferentes graus de liberdades,  $\nu = 1$  e  $\nu = 30$ ), log-normal, normal contaminada e uniforme.

### 3.1 Erro tipo I

As probabilidades de se cometer os erros do tipo I e II são inversamente proporcionais. Assim, um teste adequado deve apresentar um controle adequado das taxas de erro tipo I e um alto poder relativamente aos seus concorrentes. Se um teste apresenta taxas de erro tipo I muito inferiores aos níveis nominais de significância adotados, então ele tende a apresentar valores de poder relativamente muito baixos.

As Tabelas 2 e 3, referem-se ao erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando os níveis de significância nominais de 10% e 5%, respectivamente. Para o caso de 1%, os resultados foram apenas discutidos sem apresentá-los. Foram consideradas as combinações de  $n$  e  $p$ , previamente apresentadas na Tabela 1.

Na Tabela 2 apresentam-se as taxas de erro tipo I referente aos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de  $n$  e  $p$ , para  $\alpha = 10\%$ . O TMCNMD apresentou, na maior parte dos resultados, os valores dos níveis de significância reais próximos do nível de significância nominal de  $\alpha = 10\%$ . Em nenhuma situação ele foi considerado liberal ou conservativo. Para checar isso, aplicou-se um teste binomial exato no nível nominal de significância de 1%. Nesse caso, valores estimados da proporção de rejeição de  $H_0$ , inferiores a 8,34% e superiores a 11,85%, são considerados significativamente diferentes ( $p < 0,01$ ) do nível nominal de 10%. Da mesma forma, para os níveis nominais de significância de 5% e 1%, os limites para as rejeições são, 3,83% e 6,39%, e 0,52% e 1,73%, respectivamente.

O TNMBP, na maioria das vezes, foi considerado exato, mas nas situações  $n = 10$  com  $p = 4$  e 6,  $n = 20$  com  $p = 18$ , o teste foi conservativo. Observa-se no TSWNM, que para valores de  $p$  grande, as taxas de erro tipo I foram consideradas abaixo do nível de significância nominal (conservativo). Isso ocorreu nos casos em que os valores de  $p$  se aproximam dos valores de  $n$ , ou seja quando,  $n = 20$  e  $p = 18$ ,  $n = 100$  e  $p = 50$  e 98,  $n = 200$  com  $p = 50$  e 100.

O TNMt apresentou em todos os seus resultados os valores dos níveis de significância real próximos do nível de significância nominal fixado, ou seja, o teste pode ser classificado como exato. Vale ressaltar que os valores das taxas de erro tipo I estimadas para  $n = 10$  e  $p = 8$ ,  $n = 20$  e  $p = 18$ ,  $n = 50$  e  $p = 48$ ,  $n = 100$  e  $p = 98$ , não puderam ser computadas, em virtude de o tamanho da amostra efetiva ser igual  $n - p - 1 = 1$ , não havendo assim como aplicar o teste proposto.

O TSWNM, assim como o TNMBP, na maioria das vezes, foi considerado exato e em outras ocasiões foi considerado conservativo. O TMCNMD e o TNMt para estas configurações (Tabela 2) obtiveram o controle do erro tipo I melhor do que os outros dois testes.

Em comparação a outros testes de normalidade multivariada existentes na literatura, buscou-se fazer um paralelo em algumas circunstâncias apropriadas da Tabela 2 com os testes comparados por Cirillo e Ferreira (2003). Notou-se, por

exemplo, que o teste de normalidade baseado no coeficiente de correlação Quantil-Quantil multivariado para amostras de tamanho  $n = 100$  com  $p = 2$  e  $p = 10$  tiveram controle adequado das taxas de erro tipo I, dados respectivamente por 0,1038 e 0,0965, o mesmo ocorre para os quatro testes comparados na Tabela 2.

Tabela 2 - Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição normal multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,1000	0,1065	0,1010	0,0975
	4	0,1030	0,0785	0,0850	0,1075
	6	0,0980	0,0765	0,0895	0,1020
	8	0,1175	0,0915	0,0950	-
20	2	0,0965	0,1010	0,1045	0,0925
	5	0,0975	0,0900	0,0935	0,1010
	10	0,1080	0,0890	0,0875	0,1050
	18	0,1000	0,0770	0,0665	-
50	2	0,1020	0,0960	0,0905	0,1080
	10	0,1050	0,0905	0,0830	0,0995
	25	0,0975	0,0955	0,0940	0,0960
	48	0,0875	0,0960	0,0865	-
100	2	0,0915	0,1035	0,0980	0,0930
	10	0,1010	0,0880	0,0845	0,1070
	50	0,1160	0,0880	0,0725	0,1030
	98	0,1075	0,0975	0,0765	-
200	2	0,0895	0,0840	0,0870	0,0970
	10	0,1035	0,1030	0,0885	0,0875
	50	0,0900	0,0885	0,0760	0,0980
	100	0,0915	0,0935	0,0645	0,1085
10000	5	0,0991	0,1032	-	0,1010

Na Tabela 3 são apresentadas as taxas de erro tipo I referente aos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de  $n$  e  $p$ , para  $\alpha = 5\%$ . O TMCNMD controlou a taxa de erro tipo I em todas as situações, independente do tamanho da amostra e do número de variáveis, ou seja, este teste foi considerado exato em todas as situações.

Para o TNMBP, na maioria das situações, o teste foi considerado exato, exceto para  $n = 10$  com  $p = 6$  e  $n = 20$  com  $p = 18$ , em que o teste foi conservativo. O TSWNM foi considerado conservativo nas situações em que  $n = 20$  com  $p = 10$ ,  $n = 20$  com  $p = 18$  e  $n = 100$  com  $p = 50$ , apresentando exato para os restantes das combinações de  $n$  e  $p$ .

O TNMt foi conceituado como sendo um teste exato, tal como o TMCNMD, por apresentar o controle da taxa de erro tipo I em todas as configurações de  $n$  e  $p$ .

Novamente procurou-se comparar algumas das taxas de erro tipo I dos testes da Tabela 3 com outros testes já avaliados na literatura. Os testes avaliados por Farrell, Barrera e Naczki (2007) para 10000 repetições Monte Carlo, como o teste de Doornik e Hansen (1994) e o teste de Henze e Zilkler (1990), para amostras de tamanho  $n = 50$  com  $p = 2$ ,  $n = 50$  com  $p = 10$  e  $n = 200$  com  $p = 2$  foram exatos, da mesma forma que os quatro testes avaliados na Tabela 3. Os testes foram também exatos para amostra de tamanho  $n = 200$  com  $p = 10$ , evento que não ocorre para o teste de Shapiro-Francia multivariado proposto por Silva (2009), que foi considerado liberal.

Tabela 3 - Erro tipo I dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição normal multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 5\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,0450	0,0525	0,0535	0,0530
	4	0,0525	0,0430	0,0495	0,0595
	6	0,0515	0,0350	0,0440	0,0520
	8	0,0510	0,0410	0,0450	-
20	2	0,0555	0,0530	0,0460	0,0450
	5	0,0510	0,0430	0,0405	0,0525
	10	0,0550	0,0390	0,0355	0,0490
	18	0,0505	0,0285	0,0340	-
50	2	0,0550	0,0420	0,0465	0,0550
	10	0,0505	0,0390	0,0405	0,0470
	25	0,0455	0,0485	0,0475	0,0485
	48	0,0430	0,0395	0,0420	-
100	2	0,0435	0,0440	0,0460	0,0465
	10	0,0525	0,0455	0,0470	0,0560
	50	0,0530	0,0380	0,0350	0,0525
	98	0,0475	0,0440	0,0435	-
200	2	0,0455	0,0430	0,0440	0,0475
	10	0,0495	0,0450	0,0455	0,0470
	50	0,0455	0,0400	0,0410	0,0480
	100	0,0455	0,0440	0,0385	0,0560
10000	5	0,0418	0,0477	-	0,0530

No último caso, foi considerando a distribuição normal multivariada em função das combinações de  $n$  e  $p$ , para  $\alpha = 1\%$ . As taxas de erro tipo I para os testes de normalidade multivariadas TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt não foram apresentados. Novamente, o TMCNMD obteve controle adequado da taxa de erro

tipo I em todas as situações, independente do tamanho da amostra,  $n$ , e do número de variáveis,  $p$ , ou seja, o teste foi considerado exato.

O TNMBP, quando avaliado em relação as taxas de erro tipo I observadas, foi considerado conservador, para os casos em que a amostra foi pequena, como em  $n = 10$  com valores de  $p$  iguais a 6 e 8 e em  $n = 20$  com  $p = 18$ . Para as demais situações, o teste foi exato. O TSWNM apresentou-se exato, com exceção dos casos em que  $p = 6$  com  $n = 10$ , sendo o teste conservativo e em que  $p$  foi igual a 98, com  $n$  igual a 100, em que esse teste foi considerado liberal. O TNMt, em sua totalidade dos casos, foi considerado um teste exato.

Vale evidenciar que, conforme pode ser visto nas Tabelas 2 e 3 o TNMt foi exato em todas as combinações,  $n$  e  $p$ , para  $\alpha = 10\%$  e  $\alpha = 5\%$  e também foi para  $\alpha = 1\%$  (resultado não apresentado). Certamente isso é um fato interessante, uma vez que a estatística tem uma distribuição nula que é uma aproximação assintótica qui-quadrado. Logo, esperaria-se que o teste não fosse exato em pequenas amostras.

### 3.2 Poder do teste

O estudo do poder do teste tem como objetivo conhecer o quanto o teste de hipóteses controla o erro tipo II ou o quanto ele é poderoso, ou seja, qual a probabilidade de rejeitar a hipótese nula se realmente for falsa, considerando-se vários cenários sob  $H_1$ . Na prática, é importante que se tenham testes com nível de significância próximos do nível de significância nominal (erro tipo I) e que o poder seja alto. O poder de um teste de hipótese pode ser afetado negativamente por três fatores: (i) quando o tamanho da amostra é pequena; (ii) se o nível de significância for baixo; e (iii) no caso em que a diferença entre o “verdadeiro” valor do parâmetro e o valor especificado pela hipótese nula seja pequeno. No caso em questão, essa distância não pode ser quantificada, mas a sua ideia é de que quanto mais afastada do modelo normal multivariada for a distribuição, maior deverá ser o poder do teste. A quantificação de quão afastada está a distribuição dos dados em relação ao modelo normal não pode ser feita diretamente de forma quantitativa.

O poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  grau de liberdade em função de  $n$  e  $p$ , para  $\alpha = 10\%$ , está indicado na Tabela 4. O TMCNMD apresentou baixos valores de poder nas situações em que a amostra era pequena como, por exemplo, para  $n = 10$  e quando o valor de  $n$  se aproxima do valor do  $p$  ( $n = 20$  com  $p = 10$  e 18,  $n = 50$  com  $p = 48$  e  $n = 100$  com  $p = 98$ ).

O TNMBP apresentou os melhores desempenhos em relação aos demais testes, atingindo 100% a partir da configuração de  $n = 20$  com  $p = 18$ . O TSWNM só atingiu 100% de desempenho em poder quando a amostra foi superior a  $n = 50$ , para qualquer valor de  $p$ . Para as demais configurações de  $n$  e  $p$ , ele também teve um excelente desempenho.

Já o TNMt apresentou poder muito baixo em todas as combinações de  $n$  e  $p$  avaliadas, com exceção, de quando a amostra foi muito grande,  $n = 10000$ . Em relação à amostra de tamanho 10000, o TMCNMD, TNMBP e o TNMt

apresentaram 100% de poder, o que é uma grande vantagem em relação ao teste TSWNM, pois esse é restrito às condições de amostra menores que 5000.

É conveniente salientar que a *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  grau de liberdade é uma distribuição bem diferenciada da normal multivariada. Dessa forma, o ideal é que se tenha valores elevados de poder, o que não aconteceu com o teste proposto (TNMt). Portanto, o TNMt não é considerado um teste adequado para a maior parte das situações apresentadas.

Tabela 4 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  grau de liberdade em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,5645	0,8040	0,7690	0,1585
	4	0,2530	0,8675	0,8345	0,1565
	6	0,1250	0,9065	0,8790	0,1165
	8	0,2000	0,9380	0,9120	-
20	2	0,9060	0,9690	0,9555	0,2765
	5	0,8955	0,9940	0,9900	0,1770
	10	0,4280	0,9975	0,9955	0,1185
	18	0,3580	1,0000	0,9985	-
50	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,3875
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,2125
	25	0,9675	1,0000	1,0000	0,1025
	48	0,6370	1,0000	1,0000	-
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,4440
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,3980
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,1055
	98	0,8455	1,0000	1,0000	-
200	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,4980
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,5730
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,1785
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,1155
10000	5	1,0000	1,0000	-	0,9990

Os desempenhos para o poder dos TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição *t-student* multivariada com  $\nu = 1$  para  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  são mostrados, respectivamente, nas Tabelas 5 e 6 em função de  $n$  e  $p$ .

Notou-se, para o TMCNMD, com tamanhos de amostrais  $n$  iguais a 10 e 20, que o aumento do número de variáveis fizeram o poder diminuir, chegando a ficar abaixo do nível nominal de significância, em alguns casos. O TMCNMD apresentou bom desempenho para tamanhos grandes de amostras,  $n = 200$ , independentemente do número de variáveis (Tabelas 5 e 6).

O TNMBP apresentou melhor desempenho que o TMCNMD e o TNMt nas situações em que  $n = 10$  e  $n = 20$ , para todas as combinações de  $p$  consideradas e, inclusive, o TNMBP mostrou-se melhor que o TSWNM para os mesmos tamanhos amostrais de 10 e 20, com exceção somente dos casos do  $\alpha = 1\%$ , para  $n = 10$  com  $p = 8$  e  $n = 20$  com  $p = 10$  (Tabela 6), porém, essas diferenças foram relativamente pequenas chegando a ser insignificantes. O TSWNM apresentou ótimo desempenho do teste em relação ao poder, atingindo 100% a partir da situação de  $n = 50$ , para qualquer valor de  $p$ .

O TNMt para o caso de  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$  não teve um desempenho satisfatório, exceto quando a amostra foi de 10000. Retirando esse caso, o poder do teste oscilou de 5,35% ( $n = 50$  com  $p = 25$ ) a 48,70% ( $n = 200$  com  $p = 10$ ) para o caso de  $\alpha = 5\%$  (Tabela 5). No caso de  $\alpha = 1\%$  (Tabela 6) esse intervalo varia de 0,90 ( $n = 200$  com  $p = 100$ ) a 41,80 ( $n = 200$  com  $p = 2$ ) pontos percentuais.

Tabela 5 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  grau de liberdade em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 5\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,3930	0,7495	0,7185	0,0990
	4	0,1450	0,8210	0,7945	0,0890
	6	0,0605	0,8690	0,8425	0,0645
	8	0,0970	0,9100	0,8855	-
20	2	0,8635	0,9555	0,9375	0,2010
	5	0,8010	0,9905	0,9850	0,1135
	10	0,2705	0,9955	0,9940	0,0685
	18	0,2550	0,9990	0,9980	-
50	2	0,9970	1,0000	1,0000	0,3415
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,1385
	25	0,9275	1,0000	1,0000	0,0535
	48	0,5250	1,0000	1,0000	-
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,4040
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,2995
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,0580
	98	0,7590	1,0000	1,0000	-
200	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,4640
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,4870
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,1050
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,0610
10000	5	1,0000	1,0000	-	0,9985

O TNMBP mostrou-se equivalente ao desempenho do TSWNM para tamanhos de amostras maiores ou iguais a 50, em que os valores de poder desses dois testes

atingiram 100%.

É importante ressaltar que para a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  para  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$ , o TNMBP, foi melhor ou igual ao TSWNM. Já o TNMt não é eficiente para se testar normalidade multivariada de um banco de dados com amostras menores que 10000 (Tabela 5 e 6).

Tabela 6 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 1$  grau de liberdade em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 1\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,1600	0,6255	0,6070	0,0370
	4	0,0245	0,7110	0,6990	0,0335
	6	0,0055	0,7590	0,7495	0,0125
	8	0,0250	0,8165	0,8190	-
20	2	0,7430	0,9095	0,8955	0,0995
	5	0,5035	0,9760	0,9715	0,0345
	10	0,0625	0,9890	0,9895	0,0160
	18	0,1070	0,9965	0,9950	-
50	2	0,9875	1,0000	1,0000	0,2485
	10	0,9985	1,0000	1,0000	0,0545
	25	0,7180	1,0000	1,0000	0,0125
	48	0,2920	1,0000	1,0000	-
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,3365
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,1675
	50	0,9980	1,0000	1,0000	0,0125
	98	0,4890	1,0000	1,0000	-
200	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,4180
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,3415
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,0340
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,0090
10000	5	1,0000	1,0000	-	0,9945

Na Tabela 7 os desempenhos de poder para os testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt são mostrados, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  para  $\alpha = 10\%$  em função de  $n$  e  $p$ . Vale ressaltar que quando os graus de liberdade da distribuição *t-Student* são muito grandes ( $\nu \rightarrow \infty$ ) essa distribuição tende à normal multivariada, por isso, os desempenhos de poder ficam bem próximos do nível nominal de significância. A medida que o tamanho da amostra cresce o poder tende a aumentar gradativamente. Portanto, a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  assemelha-se à distribuição normal multivariada. Em razão disso, verifica-se que os desempenhos do poder são quase equiparáveis ao nível nominal para amostras pequenas nos quatro testes

de normalidade multivariada que estão sendo comparados.

Na Tabela 7 estão apresentados os desempenhos de poder para os TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  para  $\alpha = 10\%$  em função de  $n$  e  $p$ . Tem-se que o TMCNMD apresentou melhor desempenho em relação aos demais testes em três situações, duas em que a amostra era pequena com  $n = 10$  e com números de variáveis  $p$  iguais a 4 e 8, embora praticamente desprezível, e a outra quando a amostra era grande  $n = 200$  com  $p = 10$ .

O TNMt só apresentou desempenho melhor do que os demais testes quando  $n = 10$  e  $p = 2$ , sendo que, a diferença foi pouco expressiva em relação ao TNMBP. Nas outras situações, o TNMt apresentou menor poder em relação aos outros três testes comparados. Enquanto os demais testes apresentaram um aumento de poder com o aumento de  $p$ , o TMCNMD tem um comportamento diferente. Para o TMCNMD à medida que  $p$  aumenta, o poder deste teste aumenta até um certo ponto e depois decresce. Quanto mais próximo de  $n$  fica  $p$ , menor é o poder.

No caso do TNMt os valores do poder variaram de 0,0865 à 0,1220, em todas as combinações de  $n$  com  $p$ , até mesmo quando  $n = 10000$ . Portanto, o TNMt não é poderoso. Assim, ele não é recomendado para julgar se uma determinada amostra segue uma distribuição normal multivariada, por não conseguir distinguir uma situação de normalidade de outra de não-normalidade.

Os desempenhos quanto ao poder para os testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  para  $\alpha = 5\%$ , não mostrados.

O TMCNMD mostrou-se melhor do que o TNMBP, TSWNM e TNMt, na situação  $n = 200$  com  $p = 10$ . O TNMBP obteve melhor desempenho em quase todas as situações em relação aos outros testes. O TNMBP só foi considerado com desempenho intermediário nas situações em que o tamanho da amostra foi pequeno  $n = 10$ , com número de variáveis  $p = 4$  (o TNMt obteve o mesmo resultado) e  $p = 8$ . Também ocorreu isso na situação em que  $n = 200$  e  $p = 10$ , condição em que o TMCNMD foi considerado melhor.

O TNMt apresentou os mais baixos valores de poder em relação aos outros testes quando  $n > 20$  para qualquer valor de  $p$  escolhido, com exceção, de  $p = 5$ . Na amostra de tamanho  $n = 10000$ , o TMCNMD e o TNMBP atingiram 100% do desempenho, já o TNMt só obteve 12,20% e o TSWNM é limitado para amostras de tamanho 5000.

Os valores de poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  graus de liberdade em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 1\%$ , resultados não apresentados.

O padrão do comportamento dos testes quanto ao poder foi similar ao observado para  $\alpha = 10\%$  e  $\alpha = 5\%$ . Não houve um teste que superasse os demais em todas as configurações de  $n$  e  $p$  consideradas. Para  $n$  pequeno, os valores de poder se assemelham ao nível nominal de significância, só no caso do TNMt que esse valores permaneceram baixos para todos as situações, até mesmo com amostra muito grande ( $n = 10000$ ).

Tabela 7 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$  grau de liberdade em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,1030	0,1105	0,1065	0,1155
	4	0,1125	0,1015	0,1030	0,1055
	6	0,0950	0,1215	0,1070	0,0990
	8	0,1030	0,0995	0,0880	-
20	2	0,1215	0,1325	0,1220	0,1015
	5	0,0985	0,1380	0,1200	0,1040
	10	0,0940	0,1570	0,1350	0,0910
	18	0,1270	0,1610	0,1405	-
50	2	0,1395	0,1630	0,1385	0,0945
	10	0,1465	0,2165	0,1750	0,0995
	25	0,0745	0,2805	0,2180	0,1010
	48	0,1360	0,2965	0,2315	-
100	2	0,1765	0,2055	0,1665	0,1110
	10	0,2710	0,2980	0,2265	0,1015
	50	0,0905	0,4215	0,3170	0,0865
	98	0,1280	0,4565	0,3340	-
200	2	0,2225	0,2305	0,1865	0,1070
	10	0,4875	0,3975	0,3020	0,0960
	50	0,5395	0,5870	0,4525	0,0955
	100	0,1305	0,6535	0,4910	0,1150
10000	5	1,0000	1,0000	-	0,1220

Os desempenhos de poder para os testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição log-normal multivariada para  $\alpha = 10\%$ , encontram-se na Tabela 8. O TMCNMD e o TNMt não obtiveram bom desempenho para tamanhos de amostras  $n$  com valores iguais a 10. Para amostras de tamanho 20, o TMCNMD apresentou baixo desempenho com números de variáveis iguais a 10 e 18, para os demais números de variáveis consideradas nesse caso, o teste TMCNMD apresentou poder superior 83,00%.

O desempenho do TNMBP aproximou-se do desempenho do TSWNM, ocorrendo o mesmo valor de poder para  $n = 10$  com  $p = 6$  com uma taxa de 99,05%. Para tamanhos amostrais iguais ou maiores que 20, o desempenho foi de 100%, exceto para  $n = 20$  com  $p = 2$ . Os desempenhos do TSWNM mostraram-se superiores aos demais testes em algumas situações, embora praticamente equivalente ao do TNMBP.

O TNMt obteve o seu melhor desempenho quando o valor de  $p$  é intermediário, ou seja, em valores centrais de  $p$  para cada combinação de  $n$ , com exceção de  $n = 10$ .

Para a amostra de 10000, os desempenhos dos testes TMCNMD, TNMBP e TNMt, foram máximos, ou seja, rejeitaram 100% das vezes a hipótese nula.

Tabela 8 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição log-normal multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,5475	0,8525	0,8635	0,0345
	4	0,2630	0,9605	0,9655	0,0385
	6	0,1490	0,9905	0,9905	0,1175
	8	0,1380	0,9975	0,9985	-
20	2	0,8395	0,9920	0,9945	0,0145
	5	0,8685	1,0000	1,0000	0,2215
	10	0,3855	1,0000	1,0000	0,1270
	18	0,3840	1,0000	1,0000	-
50	2	0,9915	1,0000	1,0000	0,0005
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,4195
	25	0,8420	1,0000	1,0000	0,1180
	48	0,7080	1,0000	1,0000	-
100	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,0015
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,8970
	50	0,9955	1,0000	1,0000	0,1375
	98	0,9335	1,0000	1,0000	-
200	2	1,0000	1,0000	1,0000	0,0010
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9985
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,6470
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,1665
10000	5	1,0000	1,0000	-	1,0000

O poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição log-normal multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 5\%$ , apresentou padrão de comportamento semelhante ao de 10% e os resultados não serão apresentados.

O TMCNMD junto com o TNMt apresentou os piores valores de poder nas situações em que a amostra é pequena, casos em que  $n$  possui os valores de 10 e 20, sendo que o TNMt ainda teve os resultados inferiores ao do TMCNMD. O TMCNMD atingiu 100% de desempenho nas situações em que  $n = 50$  e  $n = 100$  com número de variáveis  $p = 10$  e, também, nas situações em que o tamanho da amostra foi  $n = 200$ , para todos os números de variáveis consideradas. Já o TNMt só obteve uma melhora em seu desempenho para os casos:  $n = 20$  com  $p = 5$ ,  $n = 50$  com  $p = 10$ ,  $n = 100$  com  $p = 10$ ,  $n = 200$  com  $p = 10$  e  $p = 50$ .

O TNMBP foi considerado com um comportamento intermediário entre o TMCNMD e o TSWNM, nas situações  $n = 10$ , em que a amostra é pequena. No

entanto, essas estimativas dos desempenhos do poder para esse tamanho amostral no TNMBP foram relativamente próximas das estimativas dos desempenhos do poder do TSWNM. O poder foi de 100% com  $n = 10000$  e  $p = 5$  para o TMCNMD, o TNMBP e o TNMt (resultados não apresentados).

Os desempenhos quanto ao poder para TMCNMD, TNMBP e TSWNM, considerando a distribuição log-normal multivariada para  $\alpha = 1\%$  novamente apresentaram o mesmo padrão e não serão apresentados.

O TMCNMD e o TNMt não conseguiram um desempenho satisfatório para tamanhos de amostras  $n$  com valores iguais a 10 e 20. O TNMt para os diversos valores de amostras combinado com os das variáveis sugeridos, teve desempenho ruim, zerando nas situações em que  $n = 50$  com  $p = 2$  e  $n = 100$  com  $p = 2$ . Para amostras de tamanho  $n = 100$ , o TMCNMD apresentou bom desempenho para  $p = 10$ , atingindo a eficiência máxima de 100% (resultados não apresentados).

Em relação ao TNMBP e ao TSWNM, destaca-se que o comportamento foi semelhante ao já detalhado para  $\alpha = 10\%$  e  $\alpha = 5\%$ . O que se observa é uma redução do poder, como esperado pela redução de  $\alpha$ .

Os desempenhos de poder para os testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição normal contaminada multivariada para  $\alpha = 10\%$  são apresentados na Tabela 9 em função de  $n$  e  $p$ . O TMCNMD não obteve um desempenho adequado para tamanhos de amostras  $n$  com valores iguais a 10 e 20. Para tamanho de amostras iguais a  $n = 50$ , o teste mostrou-se melhor quando o número de variáveis foi igual a  $p = 25$ , para os demais valores de variáveis o teste mostrou baixo desempenho. Já para os valores de amostras acima de 200 e  $p > 2$  o desempenho desse teste foi satisfatório.

O TNMBP, assim como o TMCNMD, TSWNM e TNMt, apresentou baixo desempenho para amostras de tamanho  $n = 10$ , embora o TNMBP e o TSWNM apresentaram valores de poder bem superiores ao TMCNMD e o TNMt. Para amostras de tamanho  $n = 20$ , houve melhoras quanto ao desempenho, mas ainda o seu desempenho não superou o do TSWNM.

Para amostras de tamanho 100 e 200 o desempenho obtido no TNMBP e no TSWNM foram máximos, mostrando-se excelente. O TNMt só apresentou um bom desempenho para amostra igual a 10000, sendo que o TMCNMD e o TNMBP também o obtiveram. O TSWNM mostrou-se melhor do que todos os testes apresentados com as configurações escolhidas para  $n$  e  $p$ .

O desempenho dos dois testes propostos por Biase (2011), TMCNMD e TNMBP, e o TSWNM proposto por Royston (1983) em comparação ao TNMt, proposto nesse trabalho, quando considerada a distribuição normal contaminada multivariada em função de  $n$  e  $p$  para o nível de significância de  $\alpha = 5\%$  e para  $\alpha = 1\%$ , apresentou o mesmo padrão de resposta observado para  $\alpha = 10\%$ . É evidente que a redução de  $\alpha$  provoca uma redução nos valores de poder dos testes.

Os quatro testes comparados entre si, de forma geral, não apresentaram desempenho satisfatório para amostras pequenas. A partir de amostras maiores ou iguais a 50, os testes TNMBP e TSWNM foram melhores quanto à detecção de não normalidade dos dados. No caso em que foi contemplado o tamanho amostral 10000

Tabela 9 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição normal contaminada multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,2475	0,3385	0,4380	0,0525
	4	0,1770	0,3770	0,5000	0,0460
	6	0,1220	0,4010	0,5315	0,0970
	8	0,1260	0,4235	0,5560	-
20	2	0,2905	0,6720	0,8070	0,0145
	5	0,2515	0,7925	0,8945	0,1200
	10	0,2685	0,8575	0,9395	0,0985
	18	0,3805	0,8765	0,9560	-
50	2	0,3930	0,9945	0,9975	0,0030
	10	0,4435	1,0000	1,0000	0,1025
	25	0,9990	1,0000	1,0000	0,0920
	48	0,6730	1,0000	1,0000	-
100	2	0,5125	1,0000	1,0000	0,0005
	10	0,7255	1,0000	1,0000	0,1070
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,0880
	98	0,8755	1,0000	1,0000	-
200	2	0,7365	1,0000	1,0000	0,0000
	10	0,9675	1,0000	1,0000	0,1165
	50	1,0000	1,0000	1,0000	0,1050
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,1030
10000	5	1,0000	1,0000	-	1,0000

para o TNMDC, o TNMBP e o TNMt, o desempenho foi excelente, atingindo os 100% tanto para  $\alpha = 10\%$ ,  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$ .

A Tabela 10 apresenta os valores de poder do novo teste proposto, TNMt, e dos testes TMCNMD, TNMBP e TSWNM, para a distribuição uniforme multivariada em função de  $n$  e  $p$  para o nível de significância de  $\alpha = 10\%$ .

De maneira geral, o TMCNMD e o TNMt apresentaram desempenhos inferiores aos dos outros dois concorrentes. A partir de amostras de tamanho  $n = 50$  com  $p = 25$ , o TSWNM atingiu 100% de desempenho, assim como o TSWNM.

Para amostras pequenas ( $n = 10$ ), os quatro testes apresentaram baixos valores de poder. Para o tamanho amostral 10000 os testes obtiveram resultados máximos de 100% em relação ao poder. O TNMt teve o mesmo comportamento, em relação as outras distribuições não normais, referente ao poder do teste (baixo poder).

Os resultados de poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt, considerando a distribuição uniforme multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 5\%$  e  $\alpha = 1\%$ , respectivamente, apresentaram o mesmo padrão em relação aos resultados

Tabela 10 - Poder dos testes TMCNMD, TNMBP, TSWNM e TNMt considerando a distribuição uniforme multivariada em função de  $n$  e  $p$  para  $\alpha = 10\%$

$n$	$p$	TMCNMD	TNMBP	TSWNM	TNMt
10	2	0,1555	0,1130	0,1860	0,0840
	4	0,1295	0,1270	0,2400	0,0855
	6	0,0940	0,1380	0,2800	0,1070
	8	0,0885	0,1270	0,2790	-
20	2	0,2215	0,2215	0,4450	0,0790
	5	0,1420	0,3140	0,6715	0,0915
	10	0,0980	0,4550	0,8605	0,1055
	18	0,1370	0,5740	0,9405	-
50	2	0,4905	0,8565	0,9710	0,0940
	10	0,0905	0,9995	1,0000	0,0915
	25	0,2710	1,0000	1,0000	0,1060
	48	0,2395	1,0000	1,0000	-
100	2	0,7655	1,0000	1,0000	0,1150
	10	0,0850	1,0000	1,0000	0,0930
	50	0,9455	1,0000	1,0000	0,0975
	98	0,3750	1,0000	1,0000	-
200	2	0,9840	1,0000	1,0000	0,1280
	10	0,1505	1,0000	1,0000	0,0845
	50	0,9995	1,0000	1,0000	0,0975
	100	1,0000	1,0000	1,0000	0,0990
10000	5	1,0000	1,0000	-	1,0000

observados para  $\alpha = 10\%$  quanto ao poder dos quatro testes.

O que se pode destacar é que o desempenho do TSWNM em relação aos demais testes, para amostras pequenas  $n = 20$ , foi bem superior ao que já havia sido observado para a distribuição normal contaminada (resultados não apresentados).

O TNMBP tem os valores próximos dos resultados obtidos pelo TSWNM. O TMCNMD e o TNMt foram os que tiveram desempenhos mais precários. Em relação ao poder, em nenhum caso o TNMt foi avaliado como satisfatório. Sendo assim, não é indicado como um teste apropriado para normalidade multivariada.

Como considerações importantes, observa-se que para todas as distribuições não-normais consideradas, o poder do TNMt foi muito pequeno para todos os tamanhos de amostras, com exceção de  $n = 10000$ , situação em que o teste atingiu desempenho máximo de 100%, menos no caso em que a distribuição foi *t-Student* com  $\nu = 30$  graus de liberdade. Isso é justificado, pois, como os graus de liberdade utilizados ( $\nu = 30$ ) foram grandes, essa distribuição tende à normal, por isso os desempenhos de poder ficaram bem próximos do nível nominal de significância. Vale destacar, também, que quando a amostra efetiva ( $n - p - 1$ ), isto é, a amostra

usada de fato pelo TNMt depois de feita as devidas transformações, é próxima da unidimensionalidade ou quando o tamanho da amostra efetiva for a maior possível (Tabela 11), o poder do teste apresenta-se pior do que quando os tamanhos da amostra efetiva são intermediários.

Tabela 11: Tamanho da amostra efetiva utilizada no TNMt

$n$	$p$	AE	$n$	$p$	AE
	2	7		2	97
10	4	5	100	10	89
	6	3		50	49
	8	1		98	1
20	2	17		2	197
	5	14	200	10	189
	10	9		50	149
	18	1		100	99
50	2	47	10000	5	9994
	10	39			
	25	24			
	48	1			

AE = Amostra efetiva

Para tamanhos de amostras grandes, o desempenho do TMCNMD para distribuição log-normal multivariada foi o mesmo observado para distribuição *t-Student* multivariado com  $\nu = 1$ , isto é, o poder decrescia à medida que o número de variáveis aumentava e tornava-se próximo do tamanho amostral. Com o aumento do tamanho da amostra o poder do teste estabilizou-se, em geral, em 100%. Para a distribuição uniforme multivariada, baixos valores de poder foram observados em geral.

O comportamento do TNMBP e do TSWNM foram semelhantes para as distribuições não normais comparadas. Observou-se para esses testes um excelente desempenho em relação ao poder para distribuições assimétricas à direita (log-normal) e de cauda pesada e simétrica (*t-Student* com  $\nu = 1$ ). Para a uniforme, de cauda muito pesada e simétrica, o TNMBP e o TSWNM tiveram menor poder em amostras pequenas e um excelente desempenho em amostras de tamanhos maiores ou iguais a 50. Esse mesmo padrão de resposta para os dois testes foram observados para a normal contaminada.

Para o caso da distribuição *t-Student* multivariada com  $\nu = 30$ , tanto o teste proposto, TNMt, quanto os testes propostos por Biase (2011), TMCNMD e TNMBP, e o teste proposto por Royston (1983), TSWNM, obtiveram valores pequenos de poder.

### 3.3 Aplicação

Para exemplificar e ilustrar o teste proposto e outros testes de normalidade multivariada apresentados nesse trabalho, foi utilizado um conjunto de dados fornecido por Royston (1983), referente à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos.

Os dados referem-se às informações de 20 pintores de carro sobre a concentração de hemoglobina ( $X_1$ ) e contagem de linfócitos ( $X_2$ ). Na Tabela 12 estão apresentadas as variáveis em estudo ( $X_1$  e  $X_2$ ) e seus respectivos valores conforme apresentado por Royston (1983).

Tabela 12 - Conjunto de dados referente à concentração de hemoglobina e contagem de linfócitos apresentado por Royston (1983)

Pintores	$X_1$	$X_2$	Pintores	$X_1$	$X_2$
1	13,4	14	11	15,2	26
2	14,6	15	12	16,9	28
3	13,5	19	13	14,8	24
4	15,0	23	14	16,2	26
5	14,6	17	15	14,7	23
6	14,0	20	16	14,7	9
7	16,4	21	17	16,5	18
8	14,8	16	18	15,4	28
9	15,2	27	19	15,1	17
10	15,5	34	20	14,2	14

A função do teste proposto (TNMt), baseado na transformação de Liang *et al.* (2004), foi programada e para sua utilização é necessário carregar a função `NMt.test` (apêndice):

Depois de carregar a função, estabelecer o banco de dados:

```
X1 <- c(13.4, 14.6, 13.5, 15.0, 14.6, 14.0, 16.4, 14.8, 15.2, 15.5,
        15.2, 16.9, 14.8, 16.2, 14.7, 14.7, 16.5, 15.4, 15.1, 14.2)
X2 <- c(14,15,19,23,17,20,21,16,27,34,26,28,24,26,23,9, 18,28,17,14)
X <- cbind(X1,X2)
```

Executando a função do teste:

```
NMt.test(X, tplot = TRUE)
```

Tem-se a seguinte saída do programa *R*:

```
One-sample Kolmogorov-Smirnov test
data:  t
D^+ = 0.27547, p-value = 0.06222
alternative hypothesis: the CDF of x lies above the null hypothesis
```

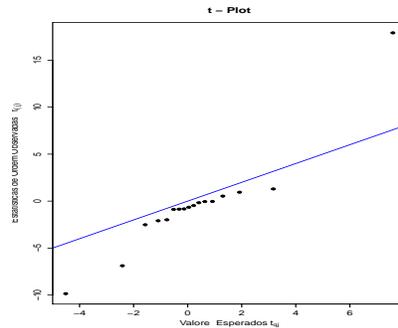


Figura 1 - *t-plot* fornecido pelo teste proposto.

Na Figura 1 tem-se o *t-plot*. Pelo gráfico pode-se observar que há indício de não normalidade multivariada dos dados.

Na Tabela 13 encontram-se as estatísticas de alguns testes de normalidade multivariada e seus respectivos valores-*p* obtidos através do programa *R*.

Tabela 13 - Resultados dos testes de normalidade multivariados fornecidos pelo programa *R*

Teste Normalidade Multivariado	Estatística do Teste	Valor <i>-p</i>
Shapiro-Wilk	0,97067	0,8345
TMCNMD	0,93840	0,2753
TNMBP	0,97202	0,8331
Doornik-Hansen	10,49981	0,0328
Henze-Zirkler	0,36243	0,5505
TNMt	0,27547	0,0622

Considerando, o nível de significância de 5%, todos os testes, exceto o de Doornik-Hansen, foram não significativos (valor-*p* maior que 5%). Assim, a hipótese de normalidade multivariada (bivariada) não deve ser rejeitada. Entretanto, verificou-se que o teste de Doornik-Hansen de normalidade multivariada implementado no programa *R* resultou em uma conclusão oposta à dos demais testes, considerando o nível nominal de significância de 5%. O teste proposto (TNMt), apresentou resultados concordantes com a maioria dos testes considerados na aplicação, embora, se fosse considerado o nível nominal de 10% de significância, ele, juntamente com o teste de Doornik-Hansen, teria também resultados discrepantes dos demais testes considerados. Esse resultado é até surpreendente, haja vista, que os resultados simulados do teste proposto, em geral, mostraram que o teste é menos poderoso que os demais, o que contrasta com os resultados da presente situação.

## Conclusões

Neste trabalho foi proposto um teste de normalidade multivariada que é baseado na transformação de Liang *et al.* (2004) para a distribuição *t* de Student. O desempenho do teste proposto foi validado por simulação Monte Carlo e observou-se que ele teve grande sucesso no controle das taxas de erro tipo *I*, possibilitando concluir, assim, que o TNMt é um teste exato. Porém, o TMNt foi analisado como sendo um teste pouco poderoso por apresentar o desempenho baixo em relação ao poder do teste, principalmente em amostras pequenas. Junto com o novo teste proposto também foi realizada a construção do gráfico *t*-plot para auxiliar na detecção de possíveis dados discrepantes. Infelizmente, o teste proposto teve poder muito baixo relativamente aos seus concorrentes e não deve ser recomendado.

MELO, J. M; FERREIRA, D. F. Proposal of a multivariate normality test based on an exact multivariate *t* student transformation. *Rev. Bras. Biom.*, Lavras, v.35, n.2, p.242-265, 2017.

■ **ABSTRACT:** *The normal distribution is one of the most important continuous probability distribution. This distribution describe several phenomena and plays an important role in inferential statistics. It is well known that the normality directly influences the quality and reliability of scientific research, since violations of normality assumption can lead to incorrect results and conclusions. The same is expected for multivariate normal distribution inferences. A simple manner, however subjective, to verify the univariate or multivariate normality is through quantile-quantile plots (Q-Q plots). Furthermore, the Q-Q plots are efficient tools for visualization of outliers. The drawback of the classical Q-Q plot is that the Mahalanobis distance quantiles are only asymptotically identical, but not independently, chi-squared distributed. This fact compromises the efficiency of the Q-Q plot or any test based on the use of the observed distance quantiles. The aim of this study is to propose an accurate test and validate its performance by Monte Carlo simulation and also provide a Q-Q plot to detect further evidence of violation of multivariate normality in  $p$  dimensions. This Q-Q plot originates from a characterization of the multivariate normal distribution made by Yang et al. (1996) based on the spherical distribution properties (Fang et al., 1990). The R program version 3.1.0 was used to implement this Q-Q plot normality test and to verify its performance by Monte Carlo simulations. The Monte Carlo simulation showed that the proposed test successful controls the type I error rates being accurate, but shows lower power than any other multivariate normality test.*

■ **KEYWORDS:** *Multivariate normality test; Q-Q plot; Student's t-distribution.*

## Referências

- 1 BASTOS, R. L. *Proposição de testes bootstrap para o índice de qualidade sensorial*. Dissertação de mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária. Universidade Federal de Lavras - UFLA. Lavras-MG, 2013, 125 p.

- 2 BIASE, A. G. *Proposição de testes computacionalmente intensivos de normalidade multivariada*. Dissertação de mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária. Universidade Federal de Lavras - UFLA. Lavras-MG, 2011, 124 p.
- 3 CIRILLO, M. A.; FERREIRA, D. F. Extensão do teste para normalidade univariado baseado no coeficiente de correlação quantil-quantil para o caso multivariado. *Revista de Matemática e Estatística*, São Paulo, v.21, n.3, p.67–84, 2003.
- 4 DOORNIK, J. A.; HANSEN, D. *An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality*. Working Paper, Oxford: Nuffield College, p. 1–16, 1994.
- 5 FANG, K. T.; KOTZ, S.; NG, K-W. *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman & Hall, London, New York. 1990, 220p.
- 6 FARRELL, P. J.; BARRERA, M. S.; NACZK, K. On tests for multivariate normality and association simulation studies. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, New York, v.77, n.12, p.1065–1080, 2007.
- 7 HENZE, N.; ZIRKLER, B. A class of invariant consistent tests for multivariate normality. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, New York, v.19, n.10, p.3595–3617, 1990.
- 8 LIANG, J.; PAN, W. S. Y.; YANG, Z. H. Characterization-based Q-Q plots for testing multinormality. *Statistics & Probability Letters*, v.70, n.3, p.183–190, 2004.
- 9 MARSAGLIA, G.; TSANG, W. W.; WANG, J. Evaluating Kolmogorov's Distribution. *Journal of Statistical Software*, v.8, n.18, p.1–4. 2003.
- 10 R CORE TEAM. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. Vienna, Austria. 2013. <http://www.R-project.org/>
- 11 ROYSTON, J. B. Some techniques for assessing multivariate based on the Shapiro-Wilk W. *Applied Statistics*, London, v.32, n.2, p.121–133, 1983.
- 12 SILVA, R. B. V. *Extensão do teste de normalidade de Shapiro-Francia para o caso multivariado*. Tese de Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária. Universidade Federal de Lavras - UFLA. Lavras-MG, 2009, 59p.
- 13 YANG, Z. H.; FANG, K. T.; LIANG, J. A characterization of multivariate normal distribution and its application. *Statistics & Probability Letters* v.30, n.4, p.347–352, 1996.

Recebido em 28.01.2016.

Aprovado após revisão em 27.07.2016.

## APÊNDICE

```
##-----##
#  Teste de normalidade multivariada baseado na transf. de Liang #
#  et al. (2004) para a distribuição t-Student, em que:         #
#  X: matriz de dados de dimensões n x p                       #
#  tplot: se colocar TRUE cria o gráfico t-plot.              #
##-----##
NMt.test <- function(X, tplot = FALSE)
{
  n <- nrow(X); p <- ncol(X); i <- 1:(n-1)
  U <- (apply(X,2,cumsum)[i,] - i*X[i+1,])/(i*(i+1))^0.5
  ki <- p + 1; k <- 1; sk <- U[k,]%*%t(U[k,])
  for (k in 2:ki) sk <- sk + U[k,]%*%t(U[k,])
  skinroot <- t(solve(chol(sk)))
  Y <- t(skinroot %*% U[ki,])
  for (k in (ki+1):(n-1))
  {
    sk <- sk + U[k,]%*%t(U[k,]); skinroot <- t(solve(chol(sk)))
    Y <- rbind(Y,t(skinroot %*% U[k,]))
  }
  t <- p^0.5*apply(Y[1:(n-p-1),],1,mean)/diag(var(t(Y)))^0.5
  # construção do t-plot
  if(tplot){
    nu <- p - 1; nn <- n - p - 1; tj <- sort(t)
    tq <- qt(((1:nn)+1/4)/(nn+1),nu)
    plot(tq,tj, pch = 19, main = "t - Plot",
         xlab = expression(paste('Valore Esperados', t[qj])),
         ylab = expression(paste('Estatísticas de
                                Ordem Observadas', t[(j)])))
    abline(0, 1, lwd=2, col="blue")
  }
  # pacote LambertW se df > 2
  install.packages("LambertW"); library(LambertW)
  if (p-1>2)
  {
    beta.true <- c(location = 0, scale = 1, df= p - 1)
    ks <- ks.test.t(t,beta.true)
  } else ks <- ks.test(t,"pt",p-1,alternative ="greater")
  return(ks)
}
```